

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE **L. FEJÉR** **A. E. INGHAM** **H. KNESER**
W. MAGNUS **O. PERRON** **G. PICKERT** **W. SÜSS†**

69. BAND, 4. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. JUNI 1958)



BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1958

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgendmöglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweide 21b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

Puppe, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I	299
Wielandt, H., Eine Distributivitätseigenschaft konjugierter Untergruppen	345
Krabbe, G. L., Convolution Operators which are not of Scalar Type	346
Zaubek, O., Über einige mit dem Zwischenwertsatz verwandte Entwicklungen	351
Suschowk, D., Die Umkehrung einer Klasse singulärer Integrale	363
Nastold, H.-J., Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraum-bündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. I	366

Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. I

Von

DIETER PUPPE

Einleitung

$\pi(X, Y)$ bezeichne die Homotopiemenge der topologischen Räume X und Y , d.h. die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $X \rightarrow Y$ (mit festem Grundpunkt, vgl. 1.1–1.3). $\pi(X, Y)$ besitzt ein ausgezeichnetes Element 0, repräsentiert durch die konstante Abbildung $X \rightarrow v_0 \in Y$ (v_0 = Grundpunkt von Y). Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert

$$f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V).$$

f^* bildet die Homotopieklassse von $a: Y \rightarrow V$ in die Homotopieklassse von $a \circ f: X \rightarrow V$ ab. Insbesondere ist $f^*(0) = 0$. Wie bei Homomorphismen von Gruppen wird Kern $f^* = f^{*-1}(0)$ gesetzt und damit der Begriff der exakten Folge definiert.

Wir ordnen in § 1 jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine unendliche Folge von Abbildungen

$$\mathfrak{A}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{Qf} SX \xrightarrow{Sf} SY \xrightarrow{SPf} SC_f \xrightarrow{SQf} S^2X \xrightarrow{S^2f} S^2Y \rightarrow \dots$$

zu, so daß die induzierte Folge der Homotopiemengen

$$(\mathfrak{A}f)^*: \pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V) \xleftarrow{(Qf)^*} \pi(SX, V) \xleftarrow{(Sf)^*} \pi(SY, V) \leftarrow \dots$$

exakt ist (für jeden Raum V , vgl. 1.12 Satz 6). C_f ist dabei der „Abbildungskegel“ von f . Er entsteht aus $X \times I + Y$ durch folgende Identifizierungen (vgl. 1.4):

$$X \times I \ni (x, 1) = f(x) \in Y \quad \text{für alle } x \in X,$$

$$X \times 0 \cup x_0 \times I \quad (< X \times I) \quad \text{wird ein einziger Punkt.}$$

Y läßt sich als Teilraum von C_f auffassen; $Pf: Y \rightarrow C_f$ ist die Inklusion. Durch Identifizieren von Y zu einem Punkt erhält man aus C_f die Einhängung SX von X (vgl. 1.8). Qf ist die natürliche Projektion, und Sf ist die Einhängung von f .

Von der vierten Stelle an besteht die Folge $(\mathfrak{A}f)^*$ aus Gruppen und Homomorphismen (4.2). Dieser Teil kann als Verallgemeinerung der „track group sequence“ von BARRATT [I] § 5 aufgefaßt werden. Ist nämlich $X < Y$ und $f: X \rightarrow Y$ die Inklusion, so ist C_f mit Y/X (d.h. X wird zu einem Punkt identifiziert) homotopieäquivalent, falls das Paar (Y, X) eine gewisse Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt (1.6). Andererseits sind $\pi(S^n X, V)$, $\pi(S^n Y, V)$, $\pi(S^n(Y/X), V)$ nichts anderes als die track groups $(X, x_0)^n(V, v_0; v_0)$,

$(Y, x_0)^n(V, v_0; v_0)$ bzw. $(Y, X)^n(V, v_0; v_0)$ (vgl. [1]). Man erhält also die track group sequence des Tripels $\{x_0\} < X < Y$. (Über den allgemeinen Fall eines beliebigen Tripels von Räumen vgl. 4.2.)

Wir werden zeigen: *Die Folge $\mathcal{A}f$ ist homotopieäquivalent mit der Folge*

$$\mathfrak{P}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{P_f} C_f \xrightarrow{P^2_f} C_{P_f} \xrightarrow{P^3_f} C_{P^2_f} \xrightarrow{P^4_f} \dots$$

(4.11 Satz 5). Demnach ergibt sich jede Abbildung der Folge $\mathcal{A}f$ aus der vorhergehenden bis auf Homotopieäquivalenz durch dieselbe Konstruktion. Der Beweis für die Exaktheit von $(\mathcal{A}f)^*$ wird dadurch vereinfacht: Man braucht die Exaktheit nur an der ersten Stelle nachzuprüfen, während man bisher bei der track group sequence drei verschiedene Arten von Stellen zu untersuchen hatte.

In § 2 wird gezeigt, daß der Homotopietyp der Folge $\mathcal{A}f$ nur vom Homotopietyp von f abhängt (2.4 Satz 9). Die letzten drei Paragraphen bringen Anwendungen:

In § 3 wird untersucht, für welche $f: X \rightarrow Y$ die induzierten Abbildungen $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ für jedes V monomorph¹⁾ sind. Anders ausgedrückt: Für welche $f: X \rightarrow Y$ folgt immer $a \simeq 0$ aus $a \circ f \simeq 0$ (V und $a: Y \rightarrow V$ beliebig)? Unter gewissen — nicht sehr einschneidenden — Voraussetzungen über X und Y gilt: *$f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ ist genau dann monomorph für jeden Bildraum V , wenn die Einhängung $Sf: SX \rightarrow SY$ von $f: X \rightarrow Y$ ein Rechts-Homotopieinverses besitzt* (3.4 Satz 12). In einem zweiten Teil dieser Arbeit [12] wird dieselbe Frage für einen Spezialfall noch genauer behandelt werden, nämlich für den Fall, daß f eine Abbildung einer orientierbaren n -dimensionalen Pseudomannigfaltigkeit auf die n -Sphäre vom Grade 1 ist.

Aus der Monomorphie von $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ folgt im allgemeinen nicht, daß f^* auch einwertig²⁾ ist (vgl. die Beispiele in 4.1 und 4.6). Wenn es aber in $\pi(X, V)$ und $\pi(Y, V)$ Gruppenstrukturen gibt, so daß f^* ein Homomorphismus ist, z. B. wenn f (bis auf Homotopieäquivalenz) die Einhängung Sf' einer anderen Abbildung f' ist (vgl. 4.2), so ist das doch der Fall. Etwas allgemeiner gilt dann: *Die Mengen $f^{*-1}f^*(\eta)$ haben für jedes $\eta \in \pi(Y, V)$ gleiche Mächtigkeit*. Wir zeigen in § 4 (vgl. 4.4 Satz 13), daß letzteres auch dann richtig ist, wenn f (bis auf Homotopieäquivalenz) von der Form $Qf' \equiv P^2f'$ ist ($\equiv$ bedeutet: homotopieäquivalent). Diese Voraussetzung ist offenbar allgemeiner als $f \equiv Sf' \equiv P^3f'$. Daß eine weitere Verschärfung in derselben Richtung nicht möglich ist, zeigen die Beispiele in 4.6.

In § 5 benutzen wir die Abbildungsfolge $\mathcal{A}i$ der Injektion $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ (vgl. 5.1) zum Beweis einer Formel über die Einhängung eines topologischen Produkts $S(X \times Y)$ [5.1 Satz 15 und 5.6 (34)] bzw. $S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ (5.9 Satz 19). $S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$ spaltet in ein „Büschel“ (topologische Summe

¹⁾ Wir nennen eine Abbildung φ zwischen Mengen mit einem ausgezeichneten Element 0 monomorph, wenn Kern $\varphi = \varphi^{-1}(0) = 0$ ist, und epimorph, wenn sie die eine Menge auf die andere abbildet.

²⁾ Eine Abbildung heißt einwertig, wenn sie je zwei verschiedenen Elementen verschiedene Bilder zuordnet (eindeutig-in).

mit Identifizierung der Grundpunkte) von Teilräumen auf. Diese Teilräume sind Sphären, wenn alle X_i Sphären sind (5.9 Satz 20). Im allgemeinen sind es Einhängungen von $\wedge$ -Produkten der Räume X_i , wobei wir (im Anschluß an HILTON) als $\wedge$ -Produkt $X \wedge Y$ den Raum bezeichnen, der aus $X \times Y$ durch Identifizieren des Teilraums $X \vee Y$ zu einem Punkt entsteht („reduced join“ bei JAMES [10] § 14). Für den Fall, daß alle X_i Sphären sind, wurde die genannte Formel (mit anderen Methoden) zuerst von K. A. HARDIE bewiesen (nach einer brieflichen Mitteilung von HILTON). Die allgemeine Formel für zwei Faktoren

$$S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \wedge Y)$$

hat HILTON angegeben (unter gewissen Voraussetzungen über die Erweiterbarkeit von Homotopien). Neu ist also hier nur die Verallgemeinerung auf mehrere Faktoren und zum Teil die genaue Untersuchung der Voraussetzungen, die über die Faktoren gemacht werden müssen. Ein wichtiger Schritt ist dabei der Nachweis, daß *das $\wedge$ -Produkt bis auf Homotopieäquivalenz assoziativ ist* (5.8 Satz 18), eine Tatsache, die keineswegs trivial ist und auch nicht ganz allgemein gezeigt werden kann, sondern nur unter der Voraussetzung, daß die Grundpunkte „nicht ausgeartet“ sind (zur Definition s. 5.5). Das ist zugleich die einzige Voraussetzung für die Gültigkeit der Formel für $S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n)$. Wenn es nur auf den freien Homotopietyp der Räume ankommt und nicht auf die Wahl der Grundpunkte, so ist sie keine Einschränkung [vgl. 5.5. D)].

Sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und Z ein weiterer Raum. f und die Identität 1_Z von Z induzieren $f \wedge 1_Z: X \wedge Z \rightarrow Y \wedge Z$ [vgl. 5.3. A)]. Diese $\wedge$ -Multiplikation mit 1_Z ist (bis auf Homotopieäquivalenz) mit der Bildung der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ vertauschbar, d. h. *man erhält eine zu $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$ homotopieäquivalente Folge, wenn man jede Abbildung von $\mathfrak{A}f$ mit 1_Z $\wedge$ -multipliziert* (5.10 Satz 21). Ein Spezialfall davon ist [$Z = S^1$, vgl. 5.3 (33)], daß die Einhängung von $\mathfrak{A}f$ mit $\mathfrak{A}(Sf)$ homotopieäquivalent ist.

Weitere Anwendungen der Abbildungsfolge und der hier genannten Ergebnisse werden im zweiten Teil der Arbeit [12] angegeben.

§ 1. Die Abbildungsfolge

1.1. In den topologischen Räumen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, soll immer ein bestimmter Punkt als *Grundpunkt* ausgezeichnet sein, es sei denn, daß ausdrücklich etwas anderes gesagt ist. Unter einer *Abbildung* $f: X \rightarrow Y$ zwischen zwei topologischen Räumen verstehen wir grundsätzlich eine stetige Abbildung, die den Grundpunkt x_0 von X in den Grundpunkt y_0 von Y überführt.

I sei das Einheitsintervall der reellen Zahlen. (Als Grundpunkt wird etwa $0 \in I$ genommen, was jedoch hier nebensächlich ist.) Eine Schar von Abbildungen $f_t: X \rightarrow Y$, $t \in I$, heißt eine *Homotopie*, wenn $(x, t) \rightarrow f_t(x)$ eine stetige Abbildung $X \times I \rightarrow Y$ definiert. Es wird bei einer Homotopie also $f_t(x_0) = y_0$

für alle $t \in I$ verlangt. Zwei Abbildungen $f, f': X \rightarrow Y$ heißen *homotop* — in Zeichen: $f \simeq f'$ —, wenn es eine Homotopie $f_t: X \rightarrow Y$ gibt mit $f_0 = f$, $f_1 = f'$.

$p: X \rightarrow \bar{X}$ sei eine Abbildung auf $\bar{X}$. Ist $A \subset \bar{X}$ genau dann offen in $\bar{X}$, wenn $p^{-1}(A)$ in X offen ist, so heißt p eine *Identifizierung*. Ist $p: X \rightarrow \bar{X}$ eine Identifizierung, so ist $f: \bar{X} \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn die Zusammensetzung $f \circ p$ stetig ist (s. BOURBAKI [2] § 9, No. 2). Darüber hinaus gilt:

Hilfssatz 1. *Ist $p: X \rightarrow \bar{X}$ eine Identifizierung, so auch die induzierte Abbildung $X \times I \rightarrow \bar{X} \times I$. Ist also $f_t: \bar{X} \rightarrow Y$ eine Schar von Abbildungen (ohne Voraussetzungen über Stetigkeit) und ist $f_t \circ p$ eine Homotopie, so auch f_t .*

Zum Beweis s. HILTON [6] S. 109f., Lemma 3.4, 3.5.

Bemerkung. Man beachte, daß nicht etwa allgemein eine Identifizierung $X \rightarrow \bar{X}$ mit der Multiplikation mit einem weiteren topologischen Raum Z vertauschbar ist (vgl. BOURBAKI [2] § 9, Exerc. 14). Entscheidend für Hilfssatz 1 ist, daß $Z = I$ lokal-kompakt ist.

1.2. Für jeden topologischen Raum X bezeichnen wir die Identität $X \rightarrow X$ mit 1 oder genauer mit 1_X . Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt *Homotopieäquivalenz*, wenn es eine Abbildung $f': Y \rightarrow X$ gibt mit

$$f' \circ f \simeq 1_X \quad \text{und} \quad f \circ f' \simeq 1_Y.$$

(Nach 1.1 bleiben die Grundpunkte bei den Abbildungen und Homotopien immer erhalten.) f' heißt *homotopieinvers* zu f . Existiert zwischen X und Y eine Homotopieäquivalenz $f: X \rightarrow Y$, so heißen X und Y *homotopieäquivalent* oder vom gleichen *Homotopietyp* — in Zeichen: $X \equiv Y$.

Sind $f: X \rightarrow Y$ und $f': X' \rightarrow Y'$ irgend zwei Abbildungen, so heißt ein Paar (φ, ψ) von Abbildungen $\varphi: X \rightarrow X'$, $\psi: Y \rightarrow Y'$ eine *Homotopieäquivalenz zwischen f und f'* — in Zeichen: $(\varphi, \psi): f \equiv f'$ —, wenn φ und ψ Homotopieäquivalenzen sind und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist, d.h. $\psi \circ f \simeq f' \circ \varphi$. Existiert zwischen f und f' eine Homotopieäquivalenz, so heißen f und f' *homotopieäquivalent* oder vom gleichen *Homotopietyp* — in Zeichen: $f \equiv f'$.

In naheliegender Verallgemeinerung nennen wir zwei (endliche oder unendliche) Folgen von Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \dots, \\ X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & X'_2 & \xrightarrow{f'_2} & X'_3 & \xrightarrow{f'_3} & \dots \end{array}$$

at oder vom gleichen Homotopietyp — in Zeichen: $f_1, f'_1, f_2, f'_2, f_3, f'_3, \dots$, wenn es ein System von Homotopieäquivalenzen

$\varphi_v: X_v \rightarrow X'_v$, $v = 1, 2, 3, \dots$, gibt, so daß jedes Quadrat des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & X_2 & \xrightarrow{f_2} & X_3 & \xrightarrow{f_3} & \dots \\ \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \\ X'_1 & \xrightarrow{f'_1} & X'_2 & \xrightarrow{f'_2} & X'_3 & \xrightarrow{f'_3} & \dots \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. Das System $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$ heißt *Homotopieäquivalenz zwischen den Folgen* $[f_1, f_2, f_3, \dots]$ und $[f'_1, f'_2, f'_3, \dots]$.

Es ist klar, daß die Relation der Homotopieäquivalenz zwischen Abbildungen und Folgen von Abbildungen reflexiv und transitiv ist. Die Symmetrie folgt aus:

Hilfssatz 2. Ist (φ, ψ) eine Homotopieäquivalenz zwischen $f: X \rightarrow Y$ und $f': X' \rightarrow Y'$ und sind φ', ψ' homotopieinvers zu φ bzw. ψ , so ist (φ', ψ') eine Homotopieäquivalenz zwischen f' und f .

Beweis. Da φ', ψ' offenbar Homotopieäquivalenzen sind, braucht nur gezeigt zu werden, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \psi' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist. In der Tat folgt aus der vorausgesetzten Beziehung $\psi \circ f \simeq f' \circ \varphi$:

$$f \circ \varphi' \simeq \psi' \circ \psi \circ f \circ \varphi' \simeq \psi' \circ f' \circ \varphi \circ \varphi' \simeq \psi' \circ f'.$$

Um später darauf Bezug nehmen zu können, formulieren wir hier noch einen Hilfssatz: A sei ein *Teilraum* des topologischen Raumes X . Wir meinen damit (hier und im folgenden) zugleich, daß A und X denselben Punkt $x_0 \in A \subset X$ als Grundpunkt haben. X/A sei der Raum, der aus X entsteht, wenn alle Punkte von A miteinander identifiziert werden.

Hilfssatz 3. Gibt es eine Homotopie der Identität $1_X: X \rightarrow X$, die den Teilraum $A \subset X$ in sich auf einen Punkt zusammenzieht, so ist die natürliche Projektion $p: X \rightarrow X/A$ eine Homotopieäquivalenz.

Beweis. Die Voraussetzung besagt: Es gibt eine Homotopie $h_t: X \rightarrow X$ mit

$$h_0 = 1_X, \quad h_1(A) = x_0, \quad h_t(A) \subset A \quad \text{für alle } t \in I.$$

h_1 induziert eine Abbildung $h'_1: X/A \rightarrow X$, die durch $h'_1 \circ p = h_1$ charakterisiert ist. $p \circ h_t$ induziert in analoger Weise für alle t eine Abbildung $h''_t: X/A \rightarrow X/A$. Offenbar ist $h''_1 = p \circ h'_1$. Nach Hilfssatz 1 ist h''_t eine Homotopie. Die Formeln

$$\begin{aligned} h'_1 \circ p &= h_1 \simeq h_0 = 1_X, \\ p \circ h'_1 &= h''_1 \simeq h''_0 = 1_{X/A} \end{aligned}$$

zeigen, daß h'_1 zu p homotopieinvers ist.

1.3. Für zwei topologische Räume X, V (mit den Grundpunkten x_0, v_0) sei $\pi(X, V)$ die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen $X \rightarrow V$ (im Sinne von 1.1, d.h. x_0 wird immer in v_0 abgebildet). Wir nennen $\pi(X, V)$ die *Homotopiemenge* von X und V . Sie besitzt ein ausgezeichnetes Element 0, repräsentiert durch die konstante Abbildung $X \rightarrow v_0$. $[a]$ bezeichne die Homotopieklasse von $a: X \rightarrow V$.

Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ induziert $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ mit $f^*(0) = 0$. Man definiert nämlich

$$f^*[a] = [a \circ f]$$

für jedes $a: Y \rightarrow V$. Offenbar gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. Für $f^{*-1}(0)$ schreiben wir auch Kern f^* .

Eine Folge von Abbildungen

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots$$

soll in dieser Arbeit *exakt* heißen, wenn die induzierte Folge

$$\begin{array}{c} y_0 = f(x_0) \quad Y \quad f(x) \\ (x_0, 1) \quad X \times I \quad (x, 1) \\ \quad \quad \quad CX \\ \quad \quad \quad (x_0, 0) \end{array} \quad \pi(X_1, V) \xleftarrow{f_1^*} \pi(X_2, V) \xleftarrow{f_2^*} \pi(X_3, V) \xleftarrow{f_3^*} \dots$$

für jedes V exakt ist, d.h.

$$\text{Kern } f_v^* = \text{Bild } f_{v+1}^* \quad \text{für alle } v = 1, 2, 3, \dots$$

1.4. Ist X irgendein topologischer Raum mit dem Grundpunkt x_0 , so nennen wir

$$CX = (X \times I) / (X \times 0 \cup x_0 \times I)$$

den *Kegel über X* . Die Punkte von CX werden ebenso wie ihre Repräsentanten in $X \times I$ mit (x, s) , $x \in X$, $s \in I$, bezeichnet, und $(x_0, 0) (= (x_0, s) = (x, 0))$ gilt als Grundpunkt.

Zu einer (stetigen) Abbildung $f: X \rightarrow Y$ definieren wir nun den *Abbildungskegel* C_f : C_f entsteht aus $CX + Y$ (topologische Summe im Sinne von BOURBAKI [2] § 8, No. 10), wenn $(x, 1) \in CX$ für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert wird (Fig. 1). Die Punkte von C_f werden ebenso wie ihre Repräsentanten in $CX + Y$ mit (x, s) ($\in CX$) bzw. y ($\in Y$) bezeichnet, und $y_0 (= (x_0, s) = (x, 0))$ gilt als Grundpunkt. Beim Übergang $CX + Y \rightarrow C_f$ wird in Y nichts identifiziert. Y kann also als Teilmenge von C_f betrachtet werden. Die Injektion $Pf: Y \rightarrow C_f$ ist (als Einschränkung der Identifizierung $CX + Y \rightarrow C_f$) offenbar stetig. Darüberhinaus stimmt die in Y als Teilmenge von C_f induzierte Topologie mit der ursprünglichen überein.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Y$ (bezüglich der ursprünglichen Topologie) eine abgeschlossene Teilmenge $B \subset C$ gibt, so daß $A = B \cap Y$. Ein solches B wird z.B. durch

$$B = \begin{cases} f^{-1}(A) \times 1 \cup A, & \text{falls } y_0 \notin A, \text{ also } x_0 \notin f^{-1}(A) \\ C f^{-1}(A) \cup A, & \text{falls } y_0 \in A, \text{ also } x_0 \in f^{-1}(A) \end{cases}$$

definiert. Diese Mengen sind abgeschlossen in C_f , weil $f^{-1}(A)$ wegen der Stetigkeit von f in X abgeschlossen ist. Man beachte, daß keine Trennungsaxiome vorausgesetzt wurden. Insbesondere braucht x_0 in X nicht abgeschlossen zu sein, und deshalb mußten die beiden Fälle $y_0 \notin A$ und $y_0 \in A$ unterschieden werden. Man kann im allgemeinen auch nicht behaupten, daß Y eine abgeschlossene Teilmenge von C_f ist.

Beispiel. $X = S^{n-1}$ [$(n-1)$ -Sphäre]. Dann ist CX eine n -Vollkugel E^n (vgl. Fig. 2), und C_f ist der Raum, der aus Y entsteht, wenn E^n mittels $f: S^{n-1} \rightarrow Y$ (S^{n-1} = Randsphäre von E^n) an Y „angeheftet“ wird (vgl. HILTON [6] S. 76).

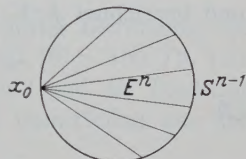


Fig. 2

1.5. Satz 1. Die Folge

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f$$

ist exakt (vgl. 1.3), d.h. für jeden Bildraum V ist die induzierte Folge

$$\pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V)$$

exakt, d.h. Kern $f^* = \text{Bild } (Pf)^*$.

Beweis. Aus der Definition von C_f und Pf (= Injektion) ergibt sich unmittelbar $Pf \circ f \simeq 0$, denn $Pf \circ f: X \rightarrow C_f$ läßt sich durch die Zuordnung $(x, s) \rightarrow (x, s)$ zu einer Abbildung $CX \rightarrow C_f$ fortsetzen [vgl. 1.4 Fig. 1]. Daraus folgt $(Pf \circ f)^* = f^* \circ (Pf)^* = 0$, d.h. $\text{Bild } (Pf)^* \subset \text{Kern } f^*$.

Zum Beweis der umgekehrten Inklusion betrachten wir ein $a: Y \rightarrow V$ mit $[a] \in \text{Kern } f^*$. Das bedeutet $f^*[a] = [a \circ f] = 0$, d.h. $a \circ f \simeq 0$. Folglich gibt es eine Abbildung $b: CX \rightarrow V$ mit $b(x, 1) = a(f(x))$ für alle $x \in X$. b und a zusammen definieren eine Abbildung $CX + Y \rightarrow V$, die mit der Identifizierung $CX + Y \rightarrow C_f$ verträglich ist. Sie induziert also $b': C_f \rightarrow V$, und nach Konstruktion gilt

$$(Pf)^*[b'] = [b' \circ Pf] = [b'|Y] = [a],$$

d.h. $[a] \in \text{Bild } (Pf)^*$.

1.6. Sei speziell $X \subset Y$ und $f: X \rightarrow Y$ die Injektion. Dann ist CX ein Teilraum von C_f (man bestätigt leicht, daß er die induzierte Topologie trägt), und es ist $CX \cap Y = X$. Ferner nehmen wir an, daß das Paar (Y, X) folgende Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt:

HE: Zu jeder Abbildung g_0 von Y in einen beliebigen Bildraum und jeder Homotopie h_i von $h_0 = g_0|_X$ gibt es eine Homotopie g_i von g_0 mit $h_i = g_i|_X$.

Einen Überblick über Fragen der Homotopieerweiterung gibt BARRATT [1] 5.1. Wir heben hier nur hervor (vgl. HILTON [6] S. 97 Th. 1.4 oder J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (J)):

Ist Y ein CW-Komplex im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD [19] und X ein Teilkomplex, so ist HE erfüllt.

Hilfssatz 4. Ist $X < Y$, $f: X \rightarrow Y$ die Injektion und genügt (Y, X) der Bedingung HE, so gibt es eine Homotopie der Identität $C_f \rightarrow C_f$, die CX in sich auf einen Punkt zusammenzieht.

Den Beweis stellen wir für den Augenblick zurück. Aus Hilfssatz 4 zusammen mit 1.2 Hilfssatz 3 folgt, daß die natürliche Projektion $q: C_f \rightarrow C_f/CX$ eine Homotopieäquivalenz ist. Andererseits ist (für jede Injektion $f: X < Y$):

$$(1) \quad C_f/CX = (CX + Y)/(CX + X) = Y/X,$$

und bezeichnet $p: Y \rightarrow Y/X$ die natürliche Projektion, so ist das Diagramm

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Pf} & C_f \\ 1_Y \downarrow & & \downarrow q \\ Y & \xrightarrow{p} & Y/X \end{array}$$

kommutativ. Das bedeutet (vgl. 1.2):

Satz 2. Ist $X < Y$, $f: X \rightarrow Y$ die Injektion und genügt (Y, X) der Bedingung HE, so ist $Pf: Y \rightarrow C_f$ mit der natürlichen Projektion $p: Y \rightarrow Y/X$ homotopieäquivalent. $(1_Y, q)$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen Pf und p .

Beweis von Hilfssatz 4. $h_i: CX \rightarrow C_f$ sei die natürliche Nullhomotopie der Injektion $h_0: CX \rightarrow C_f$, d.h.

$$h_i(x, s) = (x, s(1 - t)), \quad (x, s) \in CX, \quad t \in I.$$

$h_i|X$ ist eine Nullhomotopie der Injektion $h_0|X: X \rightarrow C_f$. Wegen HE ist $h_i|X$ so zu $g_i: Y \rightarrow C_f$ fortsetzbar, daß $g_0: Y \rightarrow C_f$ die Injektion ist. h_i und g_i zusammen definieren eine Homotopie $CX + Y \rightarrow C_f$, die mit der Identifizierung $CX + Y \rightarrow C_f$ (im Urbildraum) verträglich ist; nach 1.1 Hilfssatz 1 wird also eine Homotopie $\varphi_i: C_f \rightarrow C_f$ induziert. Nach Konstruktion ist $\varphi_0 = 1$, und $\varphi_i|CX = h_i$ zieht CX in sich auf einen Punkt zusammen.

1.7. Bemerkung. Das Resultat von 1.6 beleuchtet noch einmal die Definition von C_f . Für eine Injektion $f: X < Y$ ist C_f im wesentlichen Y/X (vorausgesetzt, daß HE erfüllt ist). Den Fall einer beliebigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$

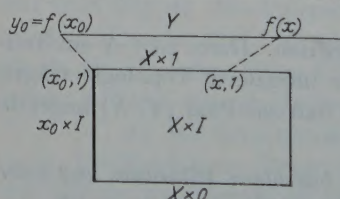


Fig. 3. Die stark ausgezogene Linie ist als einziger Punkt anzusehen

kann man darauf mit Hilfe der bekannten Konstruktion des Abbildungszyklinders zurückführen. Ersetzt man f durch die Injektion von X in den Abbildungszyylinder Z_f , die mit f homotopieäquivalent ist, und bildet dann Z_f/X , so erhält man gerade C_f .

[Genauere Durchführung: Der Abbildungszyylinder Z_f (Fig. 3) von $f: X \rightarrow Y$ entsteht aus $(X \times I)/(x_0 \times I) + Y$, wenn $(x, 1) \in (X \times I)/(x_0 \times I)$ für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert wird. (Vgl. Fox [8] § 3 oder HILTON [6] S. 107 f.; dort wird allerdings $x_0 \times I$ in $X \times I$ nicht zu einem Punkt identifiziert.) Identifiziert man jedes $x \in X$ mit $(x, 0) \in Z_f$, so wird X zu einem Teilraum von Z_f .

Auch Y kann man als Teilraum von Z_f auffassen (analog wie bei C_f , vgl. 1.4). Die Zuordnung $x \mapsto (x, t)$ definiert eine Homotopie $j_t: X \rightarrow Z_f$ zwischen der Injektion j_0 und $j_1 = i \circ f$, wobei $i: Y \rightarrow Z_f$ die Injektion ist; d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ 1_X \downarrow & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{j_0} & Z_f \end{array}$$

ist bis auf Homotopie kommutativ. Man sieht leicht (unter Benutzung von 1.1 Hilfssatz 1), daß Y Deformationsretrakt von Z_f ist (vgl. [6] S. 109, Th. 3.2). Folglich ist $(1_X, i)$ eine Homotopieäquivalenz zwischen f und der Injektion $j_0: X \rightarrow Z_f$. Daß tatsächlich $Z_f/X = C_f$ ist, ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.]

1.8. Als *Einhängung* des Raumes X bezeichnet man den Raum

$$SX = (X \times I) / (X \times 0 \cup X \times 1 \cup x_0 \times I).$$

Die Punkte von SX werden wie ihre Repräsentanten in $X \times I$ mit (x, s) , $x \in X$, $s \in I$, bezeichnet, und $(x_0, 0) (= (x, 0) = (x, 1) = (x_0, s))$ gilt als Grundpunkt. Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ wird die Einhängung $Sf: SX \rightarrow SY$ durch $Sf(x, s) = (f(x), s)$ definiert. Offenbar ist $S1_X = 1_{SX}$ und $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$ für $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

Ist $h_t: X \rightarrow Y$ eine Homotopie, so auch Sh_t (vgl. 1.1 Hilfssatz 1). Daraus folgt leicht, daß die Einhängung einer Homotopieäquivalenz wieder eine Homotopieäquivalenz ist.

Für $f: X \rightarrow \{y_0\} = Y$ ist offenbar $C_f = SX$ (vgl. 1.4).

Man bezeichnet auch manchmal den Raum $\tilde{S}X$, der aus $X \times I$ durch Identifizieren von $X \times 0$ und $X \times 1$ zu je einem Punkt entsteht, als Einhängung von X . Der Unterschied ist für „vernünftige“ X nicht wesentlich; z.B. gilt:

Hilfssatz 5. *Ist X ein CW-Komplex³⁾, so ist die natürliche Projektion $p: \tilde{S}X \rightarrow SX$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Nach 1.2 Hilfssatz 3 genügt es zu zeigen, daß sich eine Zusammenziehung von $x_0 \times I \subset \tilde{S}X$ zu einer Homotopie der Identität von $\tilde{S}X$ fortsetzen läßt. Das ist möglich, weil $(\tilde{S}X, x_0 \times I)$ ein Paar von CW-Komplexen ist (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [19] (H)) und daher die Bedingung *HE* erfüllt (1.6). (Wir haben bisher in $\tilde{S}X$ keinen Grundpunkt festgelegt. Entweder verzichtet man darauf ganz, dann ist unter „Homotopieäquivalenz“ in Hilfssatz 5 freie Homotopieäquivalenz ohne Festhaltung von Grundpunkten zu verstehen; oder man wählt irgendeinen Punkt von $x_0 \times I$ als Grundpunkt für $\tilde{S}X$.)

³⁾ In einem CW-Komplex wird grundsätzlich eine 0-Zelle der Zerlegung als Grundpunkt genommen. Das ist jedoch keine Einschränkung, weil man durch geeignete Unterteilung einer gegebenen Zellenzerlegung jeden Punkt zu einer 0-Zelle machen kann.

1.9. Nach Definition (vgl. 1.4) ist $Pf: Y \rightarrow C_f$ für alle $f: X \rightarrow Y$ eine Injektion. Wir wollen auf sie die Überlegungen von 1.6 anwenden und haben dazu zunächst zu zeigen:

Hilfssatz 6. Das Paar (C_f, Y) besitzt die Eigenschaft HE (vgl. 1.6).

Beweis. Sei $g: C_f \rightarrow V$ und $h_t: Y \rightarrow V$ mit $h_0 = g|_Y$ gegeben. Zu zeigen ist, daß es eine Fortsetzung $g_t: C_f \rightarrow V$ von h_t gibt mit $g_0 = g$. Eine solche Fortsetzung läßt sich anschaulich so beschreiben: Die Deformationswege für die Punkte $y \in Y$ sind durch h_t gegeben. Der Bildpunkt von $(x, s) \in C_f$, $s \geq \frac{1}{2}$, durchläuft erst das g -Bild der Strecke von (x, s) nach $(x, 1) = f(x)$ und dann einen Teil des Deformationsweges von $f(x) \in Y$. Die „Länge“ dieses Teils (gemessen durch den Parameter t des Deformationsweges) nimmt vom vollen Wert 1 bis auf 0 ab, wenn s von 1 nach $\frac{1}{2}$ geht. Der Bildpunkt von $(x, s) \in C_f$, $s \leq \frac{1}{2}$, durchläuft nur einen Teil des g -Bildes der Strecke von (x, s) nach $(x, 1)$, und dieser Teil nimmt von der vollen Länge bis auf 0 ab, wenn s von $\frac{1}{2}$ nach 0 geht. Explizit kann man $g_t: C_f \rightarrow V$ etwa durch

$$g_t(y) = h_t(y), \quad y \in Y$$

$$g_t(x, s) = \begin{cases} g\left(x, s + \frac{t}{2}\right), & s \geq \frac{1}{2}, \quad t \leq 2 - 2s, \quad x \in X \\ h_{2s+t-2}(f(x)), & s \geq \frac{1}{2}, \quad t \geq 2 - 2s, \quad x \in X \\ g(x, s + st), & s \leq \frac{1}{2}, \quad x \in X \end{cases}$$

definieren.

Demnach läßt sich 1.6 Satz 2 für jedes $f: X \rightarrow Y$ auf $Pf: Y \rightarrow C_f$ (an Stelle des dortigen f) anwenden. Aus den Definitionen in 1.4 und 1.8 geht unmittelbar hervor, daß $C_f/Y = SX$ ist. $Qf: C_f \rightarrow C_f/Y = SX$ sei die natürliche Projektion, d.h.

$$(3) \quad \begin{cases} Qf(x, s) = (x, s), & x \in X, \quad s \in I \\ Qf(y) = (x_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & y \in Y. \end{cases}$$

C_{Pf} entsteht nach Definition aus $CX + CY + Y$ durch die Identifizierungen

$$\begin{aligned} CX \ni (x, 1) &= f(x) \in Y && \text{für alle } x \in X \\ CY \ni (y, 1) &= y \in Y && \text{für alle } y \in Y. \end{aligned}$$

Man erhält es aber offenbar auch aus $CX + CY$ durch die Identifizierungen (Fig. 4)

$$CX \ni (x, 1) = (f(x), 1) \in CY \quad \text{für alle } x \in X.$$

Die natürliche Projektion [vgl. 1.6 (1)]

$$Rf: C_{Pf} \rightarrow C_{Pf}/CY = C_f/Y = SX$$

ist durch

$$(4) \quad \begin{cases} Rf(x, s) = (x, s), & x \in X, \quad s \in I \\ Rf(y, s) = (x_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & y \in Y, \quad s \in I \end{cases}$$

gegeben. Mit diesen Bezeichnungen geht 1.6 Satz 2 hier über in:

Satz 3. Für jedes $f: X \rightarrow Y$ ist $P^2f: C_f \rightarrow C_{Pf}$ mit $Qf: C_f \rightarrow SX$ homotopieäquivalent. $(1_{C_f}, Rf)$ ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen Abbildungen.

Dem kommutativen Diagramm (2) in 1.6 entspricht hier

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{P^2f} & C_{Pf} \\ & \searrow Qf & \downarrow Rf \\ & & SX. \end{array}$$

1.10. Das Diagramm

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} C_{Pf} & \xrightarrow{P^2f} & C_{P^2f} \\ Rf \downarrow & \searrow QPf & \downarrow RPf \\ SX & & SY \end{array}$$

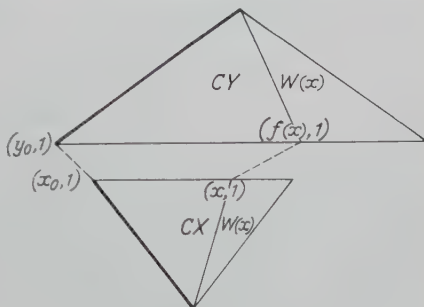


Fig. 4. Die stark ausgezogenen Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

erhält man aus (5), wenn man f durch Pf ersetzt und Rf hinzufügt. Das Dreieck in (6) ist daher kommutativ. Die untere Zeile soll nun so ergänzt werden, daß (6) — wenigstens bis auf Homotopie — kommutativ bleibt. Sei für jedes $x \in X$

$$W(x) = \{(x, s) | s \in I\} \cup \{(f(x), s) | s \in I\} \subset C_{Pf}$$

(vgl. 1.9 Fig. 4). $W(x)$ wird durch Rf [vgl. 1.9 (4)] auf die Strecke $\{(x, s) | s \in I\} \subset SX$ und durch QPf [vgl. 1.9 (3)] auf $\{(f(x), s) | s \in I\} \subset SY$ abgebildet. Wird $W(x)$ in der Richtung von $(x, 0)$ über $(x, 1) = (f(x), 1)$ nach $(f(x), 0)$ durchlaufen, so bewegt sich der Bildpunkt bei Rf von $(x, 0)$ nach $(x, 1)$ und bei QPf von $(f(x), 1)$ nach $(f(x), 0)$. Daher ist zu vermuten, daß $S_-f: SX \rightarrow SY$, definiert durch $S_-f(x, s) = (f(x), 1 - s)$ das Diagramm (6) so ergänzt, daß das untere Dreieck und damit das ganze Diagramm bis auf Homotopie kommutativ wird. Tatsächlich ist $\varphi_t: C_{Pf} \rightarrow SY$, definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi_t(x, s) &= (f(x), 1 - ts), & x \in X, s \in I \\ \varphi_t(y, s) &= (y, (1 - t)s), & y \in Y, s \in I, \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen $\varphi_0 = QPf$ und $\varphi_1 = S_-f \circ Rf$. Weil Rf und RPf Homotopieäquivalenzen sind (1.9 Satz 3), liest man aus dem durch $S_-f: SX \rightarrow SY$ ergänzten Diagramm (6) ab:

Satz 4. Für jedes $f: X \rightarrow Y$ ist $P^3f: C_{Pf} \rightarrow C_{P^2f}$ mit $S_-f: SX \rightarrow SY$ homotopieäquivalent. (Rf, RPf) ist eine Homotopieäquivalenz zwischen diesen Abbildungen.

Sei $\sigma_X: SX \rightarrow SX$ durch $\sigma_X(x, s) = (x, 1 - s)$ definiert. Dann ist $\sigma_X \circ \sigma_X = 1$ und $S_-f = Sf \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ Sf$. Das Diagramm (6) bleibt also bis auf Homotopie kommutativ, wenn man die untere Zeile nicht durch S_-f sondern durch $Sf: SX \rightarrow SY$ ergänzt und Rf durch $R_-f = \sigma_X \circ Rf$ oder RPf durch $R_-Pf = \sigma_Y \circ RPf$ ersetzt. Da σ_X und σ_Y topologische Abbildungen sind, gilt ergänzend zu Satz 4:

Satz 4'. Für jedes $f: X \rightarrow Y$ bestehen die Homotopieäquivalenzen

- a) $(R_- f, R P f) : P^3 f \equiv S f$
 b) $(R f, R_- P f) : P^3 f \equiv S f.$

1.11. Zur Abkürzung setzen wir

$$R_n f = \begin{cases} R P^n f, & n \text{ gerade} \\ R_- P^n f, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Durch wiederholte Anwendung von 1.9 Satz 3, 1.10 Satz 4' und der Tatsache, daß die Einhängung einer Homotopieäquivalenz weder eine Homotopieäquivalenz ist (vgl. 1.8), erhält man:

- (a) $(1, R f) : P^2 f \equiv Q f$ (Satz 3),
 (b) $(R f, R_1 f) : P^3 f \equiv S f$ ((Satz 4' b)),
 (c) $(R_1 f, R_2 f) : P^4 f \equiv S P f$ ((Satz 4' a), angewandt auf $P f$),
 (d) $\begin{cases} (R_2 f, R_3 f) : P^5 f \equiv S P^2 f & \text{((b), angewandt auf } P^2 f), \\ (1, S R f) : S P^2 f \equiv S Q f & \text{(Einhängung von (a))}, \end{cases}$
 (e) $\begin{cases} (R_3 f, R_4 f) : P^6 f \equiv S P^3 f & \text{((c), angewandt auf } P^2 f), \\ (S R f, S R_1 f) : S P^3 f \equiv S^2 f & \text{(Einhängung von (b))}, \end{cases}$
 ...

Durch entsprechende Fortsetzung des Verfahrens ergibt sich:

Satz 5. Zwischen den Folgen von Abbildungen

$$\mathfrak{P} f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{P f} C_f \xrightarrow{P^2 f} C_{P f} \xrightarrow{P^3 f} C_{P^2 f} \xrightarrow{P^4 f} \dots$$

und

$$\mathfrak{A} f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{P f} C_f \xrightarrow{Q f} S X \xrightarrow{S f} S Y \xrightarrow{S P f} S C_f \xrightarrow{S Q f} S^2 X \xrightarrow{S^2 f} \dots$$

besteht die Homotopieäquivalenz

$$(1_X, 1_Y, 1_{C_f}, R f, R_1 f, R_2 f, S R f \circ R_3 f, S R_1 f \circ R_4 f, S R_2 f \circ R_5 f, \dots, \\ \dots, S^n R f \circ S^{n-1} R_3 f \circ S^{n-2} R_6 f \circ \dots \circ R_{3n} f, S^n R_1 f \circ \dots \circ R_{3n+1} f, \\ S^n R_2 f \circ \dots \circ R_{3n+2} f, \dots)$$

(vgl. 1.2), d.h. in dem Diagramm

$$(7) \quad \begin{array}{ccccccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{P f} & C_f & \xrightarrow{P^2 f} & C_{P f} & \xrightarrow{P^3 f} & C_{P^2 f} & \xrightarrow{P^4 f} & \dots \\ 1 \downarrow & & 1 \downarrow & & 1 & & R f \downarrow & & R_1 f \downarrow & & R_2 f \downarrow & & \downarrow S R f \circ R_3 f \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{P f} & C_f & \xrightarrow{Q f} & S X & \xrightarrow{S f} & S Y & \xrightarrow{S P f} & S C_f & \xrightarrow{S Q f} & S^2 X & \xrightarrow{S^2 f} & \dots \end{array}$$

sind die vertikalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen, und jedes Quadrat ist bis auf Homotopie kommutativ.

$\mathfrak{A} f$ soll die Abbildungsfolge von f genannt werden.

1.12. Nach 1.5 Satz 1 ist die Folge $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{P f} C_f$ exakt, also auch die Folge $\mathfrak{P} f$. Nach 1.11 Satz 5 ist $\mathfrak{P} f$ mit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A} f$ homotopieäquivalent.

Eine solche Homotopieäquivalenz [vgl. (7)] induziert für jeden Bildraum V ein Diagramm (vgl. 1.3)

$$(8) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi(X, V) & \xleftarrow{f^*} & \pi(Y, V) & \xleftarrow{(Pf)^*} & \pi(C_f, V) & \xleftarrow{(Psf)^*} & \pi(C_{Pf}, V) \xleftarrow{(Psf)^*} \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \pi(X, V) & \xleftarrow{f^*} & \pi(Y, V) & \xleftarrow{(Pf)^*} & \pi(C_f, V) & \xleftarrow{(Qf)^*} & \pi(SX, V) \xleftarrow{(Sf)^*} \dots \end{array}$$

Da die vertikalen Abbildungen in (7) Homotopieäquivalenzen sind, sind sie hier Isomorphismen; da die einzelnen Quadrate in (7) bis auf Homotopie kommutativ sind, besteht hier strenge Kommutativität. Also ist mit der oberen Zeile auch die untere exakt, d.h. es gilt:

Satz 6. Die Abbildungsfolge $\mathcal{A}f$ irgendeiner Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist exakt, d.h. sie induziert für jeden Bildraum V eine exakte Folge der entsprechenden Homotopiemengen (vgl. 1.3).

§ 2. Invarianz der Abbildungsfolge

2.1. Das Hauptziel dieses Paragraphen ist es zu zeigen, daß die Abbildungsfolge $\mathcal{A}f$ (vgl. 1.11) bis auf Homotopieäquivalenz nur vom Homotopietyp von $f: X \rightarrow Y$ abhängt (2.4 Satz 9). Etwas allgemeiner untersuchen wir das Verhalten von $\mathcal{A}f$ bei einer „Transformation“ von f .

Unter einer *Transformation* von $f: X \rightarrow Y$ in $f': X' \rightarrow Y'$ verstehen wir ein Paar (φ, ψ) von Abbildungen $\varphi: X \rightarrow X'$, $\psi: Y \rightarrow Y'$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' \end{array}$$

bis auf Homotopie kommutativ ist, d.h. $f' \circ \varphi \simeq \psi \circ f$. Dementsprechend heißt ein System $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$ von Abbildungen $\varphi_v: X_v \rightarrow X'_v$ eine Transformation von

$$\begin{array}{c} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \xrightarrow{f_3} \dots \\ \text{in} \\ X'_1 \xrightarrow{f'_1} X'_2 \xrightarrow{f'_2} X'_3 \xrightarrow{f'_3} \dots, \end{array}$$

wenn $f'_v \circ \varphi_v \simeq \varphi_{v+1} \circ f_v$ gilt für $v = 1, 2, 3, \dots$. Eine Transformation (φ, ψ) oder $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$ ist also eine Homotopieäquivalenz im Sinne von 1.2, wenn φ und ψ bzw. φ_v für alle v Homotopieäquivalenzen sind.

2.2. Zu einer Transformation (φ, ψ) von $f: X \rightarrow Y$ in $f': X' \rightarrow Y'$ zusammen mit einer bestimmten Homotopie $\Phi_t: X \rightarrow Y'$ zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$ definieren wir

$$\chi = C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \rightarrow C_{f'}$$

(vgl. 1.4) durch

$$(9) \quad \chi(y) = \psi(y), \quad y \in Y$$

$$\chi(x, s) = \begin{cases} (\varphi(x), 2s) & x \in X, s \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_{2s-1}(x), & x \in X, s \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Offenbar gilt $\chi \circ Pf = \chi|Y = Pf' \circ \psi$ ($Pf: Y \rightarrow C_f$ ist die Injektion, vgl. 1.4), also ist (ψ, χ) eine Transformation von Pf in Pf' , bei der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Pf} & C_f \\ \psi \downarrow & & \downarrow \chi \\ Y' & \xrightarrow{Pf'} & C_{f'} \end{array}$$

sogar (streng) kommutativ ist. Hierzu kann man nun wieder

$$C(\psi, \chi, \Psi): C_{Pf} \rightarrow C_{Pf'}$$

bilden, wobei $\Psi_t: Y \rightarrow C_{f'}$ irgendeine Homotopie zwischen $\Psi_0 = Pf' \circ \psi$ und $\Psi_1 = \chi \circ Pf (= \Psi_0)$ ist, z.B. die triviale Homotopie $\Psi_t = Pf' \circ \psi$ für alle $t \in I$. Im letzteren Fall schreiben wir kurz $C(\psi, \chi)$ für $C(\psi, \chi, \Psi)$.

Durch Iteration erhält man eine „durch (φ, ψ, Φ) induzierte“ Transformation $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots)$ von

$$\mathfrak{P}f: X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{Pf} C_f \xrightarrow{P^2f} C_{Pf} \xrightarrow{P^3f} C_{P^2f} \rightarrow \dots$$

in $\mathfrak{P}f'$, wenn man χ_v durch

$$\begin{aligned} \chi_1 &= C(\psi, \chi) \\ \chi_2 &= C(\chi, \chi_1) \\ \chi_v &= C(\chi_{v-2}, \chi_{v-1}), \quad v > 2 \end{aligned}$$

definiert.

Für die Abbildungsfolgen $\mathfrak{A}f$ bzw. $\mathfrak{A}f'$ (vgl. 1.11) liegt es nahe, das Diagramm

$$(10) \quad \begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \rightarrow & C_f & \xrightarrow{Qf} & SX & \xrightarrow{Sf} & SY & \xrightarrow{SPf} & SC_f & \rightarrow \dots \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \downarrow \chi & & \downarrow S\varphi & & \downarrow S\psi & & \downarrow S\chi & \\ X' & \xrightarrow{f'} & Y' & \rightarrow & C_{f'} & \xrightarrow{Qf'} & SX' & \xrightarrow{Sf'} & SY' & \xrightarrow{SPf'} & SC_{f'} & \rightarrow \dots \end{array}$$

zu betrachten. Das erste Quadrat ist nach Voraussetzung bis auf Homotopie kommutativ. Vom zweiten haben wir die Kommutativität oben schon festgestellt. Im dritten geht $Y \subset C_f$ sowohl bei $S\varphi \circ Qf$ als auch bei $Qf' \circ \chi$ [vgl. 1.8, 1.9 (3)] in den Grundpunkt von SX' über, und für $(x, s) \in C_f$ ($x \in X, s \in I$) gilt

$$\begin{aligned} (S\varphi \circ Qf)(x, s) &= (\varphi(x), s) \\ (Qf' \circ \chi)(x, s) &= \begin{cases} (\varphi(x), 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ (x'_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

[vgl. (3), (9)]. Daraus folgt leicht $Qf' \circ \chi \simeq S\varphi \circ Qf$. Das vierte Quadrat in (10) geht durch Einhängung aus dem ersten, das fünfte aus dem zweiten usw. hervor. Folglich sind alle Quadrate in (10) mindestens bis auf Homotopie kommutativ, d.h. $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \dots)$ ist eine Transformation von $\mathfrak{A}f$ in $\mathfrak{A}f'$. Wir nennen sie die durch (φ, ψ, Φ) induzierte Transformation.

2.3. Satz 7. Ist (φ, ψ) eine Transformation von $f: X \rightarrow Y$ in $f': X' \rightarrow Y'$ (vgl. 2.1) und $\Phi_1: X \rightarrow Y'$ eine Homotopie zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$, so sind in den induzierten Transformationen $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots)$ von $\mathfrak{P}f$ in $\mathfrak{P}f'$ und $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, \dots)$ von $\mathfrak{A}f$ in $\mathfrak{A}f'$ (vgl. 2.2) je zwei entsprechende Abbildungen homotopieäquivalent, d.h.

$$S^n \varphi \equiv \chi_{3n-2}$$

$$S^n \psi \equiv \chi_{3n-1}$$

$$S^n \chi \equiv \chi_{3n}$$

für alle $n \geq 1$.

Beweis. Wir zeigen zunächst

$$(11) \quad \chi_1 = C(\psi, \chi) = C(\psi, C(\varphi, \psi, \Phi)) \equiv S\varphi.$$

$\chi_1: C_{Pf} \rightarrow C_{Pf'}$ ist nach 2.2 durch

$$\chi_1(x, s) = \chi(x, s), \quad x \in X, s \in I$$

$$\chi_1(y, s) = \begin{cases} (\psi(y), 2s), & s \leq \frac{1}{2}, y \in Y \\ (Pf' \circ \psi)(y) = (\chi \circ Pf)(y), & s \geq \frac{1}{2}, y \in Y \end{cases}$$

definiert (über C_{Pf} vgl. 1.9). In dem Diagramm

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} C_{Pf} & \xrightarrow{\chi_1} & C_{Pf'} \\ Rf \downarrow & & \downarrow Rf' \\ SX & \xrightarrow{S\varphi} & SX' \end{array}$$

sei Rf wie in 1.9 die natürliche Projektion $C_{Pf} \rightarrow C_{Pf}/CY = SX$. Jedes $(y, s) \in CY < C_{Pf}$ geht sowohl bei $Rf' \circ \chi_1$ als auch bei $S\varphi \circ Rf$ in den Grundpunkt von SX' über. Für $(x, s) \in C_{Pf}$ ($x \in X, s \in I$) gilt

$$(Rf' \circ \chi_1)(x, s) = Rf'(\chi(x, s)) = \begin{cases} Rf'(\varphi(x), 2s) = (\varphi(x), 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ Rf'(\Phi_{2s-1}(x)) = (x'_0, 1) = \text{Grundpunkt}, & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

[vgl. (9), (4)] und

$$(S\varphi \circ Rf)(x, s) = S\varphi(x, s) = (\varphi(x), s).$$

Daraus entnimmt man leicht $S\varphi \circ Rf \simeq Rf' \circ \chi_1$. Also ist (12) bis auf Homotopie kommutativ, und weil Rf, Rf' Homotopieäquivalenzen sind (1.9 Satz 3), ist (11) damit bewiesen.

Aus (11) gewinnt man

$$\chi_2 \equiv S\psi \text{ durch Anwendung auf } (\psi, \chi) \text{ an Stelle von } (\varphi, \psi),$$

$$\chi_3 \equiv S\chi \text{ durch Anwendung auf } (\chi, \chi_1),$$

$$\chi_v \equiv S\chi_{v-3}, v > 3, \text{ durch Anwendung auf } (\chi_{v-3}, \chi_{v-2}),$$

$$\chi_v \equiv S\chi_{v-3} \equiv S^2\chi_{v-6} \equiv \dots \text{ durch wiederholte Anwendung der vorigen Formel und ihrer Einhngungen.}$$

Aus diesen Formeln ist Satz 7 leicht zu entnehmen.

2.4. Wir werden nun zeigen, daß der Homotopietyp der Folgen $\mathfrak{P}f$ und $\mathfrak{U}f$ (vgl. 1.11) nur vom Homotopietyp von $f: X \rightarrow Y$ abhängt. In diesem ganzen Abschnitt sei (φ, ψ) eine Transformation von $f: X \rightarrow Y$ in $f': X' \rightarrow Y'$ (vgl. 2.1) und $\Phi_t: X \rightarrow Y'$ eine Homotopie zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$.

Hilfssatz 7. Ist (φ, ψ) eine Homotopieäquivalenz zwischen f und f' , so ist auch $\chi = C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \rightarrow C_{f'}$ (vgl. 2.2) eine Homotopieäquivalenz.

Der Beweis wird bis zum nächsten Abschnitt zurückgestellt. Als Folgerung ergibt sich:

Satz 8a). Sind in der durch (φ, ψ, Φ) induzierten Transformation $(\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots)$ von $\mathfrak{P}f$ in $\mathfrak{P}f'$ (vgl. 2.2) zwei aufeinanderfolgende Abbildungen Homotopieäquivalenzen, so auch alle folgenden.

Da nach 2.3 Satz 7 jede der Abbildungen $\varphi, \psi, \chi, \chi_1, \chi_2, \dots$ mit der entsprechenden aus $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \dots)$ homotopieäquivalent ist, folgt aus Satz 8a):

Satz 8b). Sind in der durch (φ, ψ, Φ) induzierten Transformation $(\varphi, \psi, \chi, S\varphi, S\psi, S\chi, S^2\varphi, \dots)$ von $\mathfrak{U}f$ in $\mathfrak{U}f'$ (vgl. 2.2) zwei aufeinanderfolgende Abbildungen Homotopieäquivalenzen, so auch alle folgenden.

Die Sätze 8a) und 8b), angewandt auf die ersten beiden Abbildungen φ, ψ der genannten Transformationen, ergeben die Invarianzaussage:

Satz 9. Ist $f: X \rightarrow Y$ mit $f': X' \rightarrow Y'$ homotopieäquivalent, so auch $\mathfrak{P}f$ mit $\mathfrak{P}f'$ und $\mathfrak{U}f$ mit $\mathfrak{U}f'$.

2.5. Beweis von Hilfssatz 7. Zunächst einige Vorbemerkungen:

A) Zwei Transformationen (φ, ψ) von $f: X \rightarrow Y$ in $f': X' \rightarrow Y'$ und (φ', ψ') von f' in $f'': X'' \rightarrow Y''$ setzen sich offenbar zu einer Transformation $(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi)$ von f in f'' zusammen. Sind $\Phi_t: X \rightarrow Y'$ und $\Phi'_t: X' \rightarrow Y''$ Homotopien zwischen $\Phi_0 = f' \circ \varphi$ und $\Phi_1 = \psi \circ f$ bzw. zwischen $\Phi'_0 = f'' \circ \varphi'$ und $\Phi'_1 = \psi' \circ f'$, so ist $(\Phi' \circ \Phi)_t: X \rightarrow Y''$, definiert durch

$$(13) \quad (\Phi' \circ \Phi)_t = \begin{cases} \Phi'_{2t} \circ \varphi, & t \leq \frac{1}{2} \\ \psi' \circ \Phi_{2t-1}, & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $f'' \circ \varphi' \circ \varphi$ und $\psi' \circ \psi \circ f$. Es gilt

$$(14) \quad C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi) \simeq C(\varphi', \psi', \Phi') \circ C(\varphi, \psi, \Phi)$$

(zur Definition dieser Abbildungen vgl. 2.2).

Beweis von (14). Wir bezeichnen die linke Seite von (14) zur Abkürzung mit χ' , die rechte mit χ'' . Nach Definition von $C(\varphi, \psi, \Phi): C_f \rightarrow C_{f'}$ [2.2 (9)] ist

$$\chi'(y) = \psi'(\psi(y)) = \chi''(y) \quad \text{für alle } y \in Y \subset C_f.$$

Die Strecke $\{(x, s) | s \in I\} \subset C_f$ ($x \in X$ fest) geht bei χ' und χ'' in denselben Weg über, der lediglich in verschiedener Weise parametrisiert ist. Es ist nämlich

[vgl. (9), (13)]

$$\chi'(x, s) = \begin{cases} (\varphi'(\varphi(x)), 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \Phi'_{4s-2}(\varphi(x)), & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ \psi'(\Phi_{4s-3}(x)), & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

und

$$\chi''(x, s) = \begin{cases} (\varphi'(\varphi(x)), 4s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ \Phi'_{4s-1}(\varphi(x)), & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \psi'(\Phi_{2s-1}(x)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Eine Homotopie der Identität von I in diejenige stückweise affine Selbstabbildung, die 0 in 0, $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ in $\frac{1}{2}$ und 1 in 1 abbildet, liefert offenbar eine Homotopie zwischen χ' und χ'' .

B) Sei $(\varphi_\tau, \psi_\tau)$, $\tau \in I$, eine Schar von Transformationen von $f: X \rightarrow Y$ in $f': X' \rightarrow Y'$ und $\Phi_i^\tau: X \rightarrow Y'$ sei für jedes $\tau \in I$ eine Homotopie zwischen $\Phi_0^\tau = f' \circ \varphi_\tau$ und $\Phi_1^\tau = \psi_\tau \circ f$. Sind φ_τ, ψ_τ Homotopien (d.h. stetig von τ abhängig, vgl. 1.1) und definiert die Zuordnung $(x, t, \tau) \rightarrow \Phi_t^\tau(x)$ eine stetige Abbildung $X \times I \times I \rightarrow Y'$, so ist auch

$$C(\varphi_\tau, \psi_\tau, \Phi^\tau): C_f \rightarrow C_{f'}$$

(vgl. 2.2) eine Homotopie, wie man mit Hilfe von 1.1 Hilfssatz 1 leicht zeigt.

Ist φ_τ, ψ_τ und Φ_t^0 mit den genannten Eigenschaften gegeben, jedoch zunächst nicht Φ_t^τ für $\tau > 0$, so kann man Φ_t^0 immer so zu Φ_t^τ für alle $\tau \in I$ erweitern, daß alle obigen Eigenschaften erfüllt sind. Man setze z.B.

$$\Phi_t^\tau = \begin{cases} f' \circ \varphi_{\tau-4t}, & t \leq \frac{\tau}{4} \\ \Phi_{(4t-\tau)(4-2\tau)^{-1}}^0, & \frac{\tau}{4} \leq t \leq 1 - \frac{\tau}{4} \\ \psi_{\tau-4+4t} \circ f, & t \geq 1 - \frac{\tau}{4}. \end{cases}$$

Daraus folgt: Sind (φ_0, ψ_0) und (φ_1, ψ_1) zwei homotope Transformationen von f in f' (d.h. $\varphi_0 \simeq \varphi_1$, $\psi_0 \simeq \psi_1$) und ist Φ_t^0 eine Homotopie zwischen $f' \circ \varphi_0$ und $\psi_0 \circ f$, so gibt es eine Homotopie Φ_t^1 zwischen $f' \circ \varphi_1$ und $\psi_1 \circ f$, so daß

$$C(\varphi_0, \psi_0, \Phi^0) \simeq C(\varphi_1, \psi_1, \Phi^1).$$

C) Gibt es zu $f: X \rightarrow Y$ zwei Abbildungen $g, g': Y \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} g \circ f &\simeq 1_X & (\text{„Links-Homotopieinverses“}) \\ f \circ g' &\simeq 1_Y & (\text{„Rechts-Homotopieinverses“}), \end{aligned}$$

so folgt $g \simeq g \circ f \circ g' \simeq g'$ und daraus $f \circ g \simeq 1_Y$, d.h. g ist (zweiseitig) homotopieinvers zu f , f ist also eine Homotopieäquivalenz (vgl. auch Fox [8] Th. 2).

Der eigentliche Beweis von Hilfssatz 7 wird nun folgendermaßen geführt: Sei (φ, ψ) eine Homotopieäquivalenz zwischen $f: X \rightarrow Y$ und $f': X' \rightarrow Y'$ und

$\Phi_t: X \rightarrow Y'$ eine Homotopie zwischen $f' \circ \varphi$ und $\psi \circ f$. Sind φ' und ψ' homotopieinvers zu φ bzw. ψ , so ist (φ', ψ') eine Homotopieäquivalenz zwischen f' und f (1.2 Hilfssatz 2). Es gibt also eine Homotopie $\Phi'_t: X' \rightarrow Y$ zwischen $f \circ \varphi'$ und $\psi' \circ f'$. Nach (14) ist

$$(15) \quad C(\varphi', \psi', \Phi') \circ C(\varphi, \psi, \Phi) \simeq C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi),$$

$$(16) \quad C(\varphi, \psi, \Phi) \circ C(\varphi', \psi', \Phi') \simeq C(\varphi \circ \varphi', \psi \circ \psi', \Phi \circ \Phi').$$

Wir werden zeigen, daß auf den rechten Seiten von (15) und (16) Homotopieäquivalenzen stehen. Daraus folgt dann die Behauptung von Hilfssatz 7. Multipliziert man nämlich (15) von links mit einem Homotopieinversen der rechten Seite, so sieht man, daß $C(\varphi, \psi, \Phi)$ ein Links-Homotopieinverses besitzt. Analog ergibt sich aus (16) die Existenz eines Rechts-Homotopieinversen; also ist $C(\varphi, \psi, \Phi)$ eine Homotopieäquivalenz [vgl. C)].

Beim Nachweis, daß die rechten Seiten von (15) und (16) Homotopieäquivalenzen sind, kann man sich offenbar auf eine der beiden Formeln, etwa (15) beschränken: Nach Voraussetzung ist $\varphi' \circ \varphi \simeq 1_X$, $\psi' \circ \psi \simeq 1_Y$. Daher gibt es nach B) eine zu der Transformation $(1_X, 1_Y)$ von f in f gehörende Homotopie $\Phi_t^1: X \rightarrow Y$ zwischen $\Phi_0^1 = f$ und $\Phi_1^1 = f$, so daß

$$(17) \quad C(\varphi' \circ \varphi, \psi' \circ \psi, \Phi' \circ \Phi) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^1).$$

Setzen wir $\Phi_t^{-1} = \Phi_{1-t}^1$, so gilt nach (14)

$$(18) \quad C(1_X, 1_Y, \Phi^1) \circ C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1}) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^1 \circ \Phi^{-1}),$$

$$(19) \quad C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1}) \circ C(1_X, 1_Y, \Phi) \simeq C(1_X, 1_Y, \Phi^{-1} \circ \Phi).$$

Es gibt eine stetig von allen Variablen abhängende Schar $\Psi_t^\tau: X \rightarrow Y$, $t, \tau \in I$, mit $\Psi_t^0 = (\Phi^1 \circ \Phi^{-1})_t$ und $\Psi_t^1 = f$ für alle $t \in I$; man braucht nur

$$\Psi_t^\tau = \begin{cases} \Phi_{(1-\tau) \cdot 2t}^1, & t \leq \frac{1}{2} \\ \Phi_{1-(1-\tau)(2-2t)}^{-1} = \Phi_{(1-\tau)(2-2t)}^1, & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

zu setzen [vgl. (13)]. Daher folgt aus B):

$$(20) \quad C(1_X, 1_Y, \Phi^1 \circ \Phi^{-1}) \simeq C(1_X, 1_Y, \Psi^1) = C(1_X, 1_Y).$$

Nach Definition gilt [vgl. (9)]

$$\begin{aligned} C(1_X, 1_Y)(y) &= y, & y \in Y \\ C(1_X, 1_Y)(x, s) &= \begin{cases} (x, 2s), & s \leq \frac{1}{2}, \quad x \in X \\ f(x) = (x, 1), & s \geq \frac{1}{2}, \quad x \in X, \end{cases} \end{aligned}$$

woraus man leicht entnimmt, daß $C(1_X, 1_Y)$ zur Identität von C , homotop ist. Wegen (20) und (18) ist dann auch die linke Seite von (18) zur Identität homotop. Entsprechendes gilt für (19), d.h. $C(1_X, 1_Y, \Phi^1)$ ist eine Homotopieäquivalenz und damit wegen (17) auch die rechte Seite von (15).

§ 3. Bedingungen für die Monomorphie von $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$

3.1. Folgende Feststellungen sind nahezu trivial:

A) $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann nullhomotop, wenn die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ für jeden Bildraum V die Nullabbildung ist. [$0 \in \pi(X, V)$ ist die Homotopieklasse von $X \rightarrow v_0 = \text{Grundpunkt von } V$, vgl. 1.3.]

B) $f: X \rightarrow Y$ besitzt genau dann ein Links-Homotopieinverses $l: Y \rightarrow X$ (d.h. $l \circ f \simeq 1_X$), wenn $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ für jedes V epimorph⁴⁾ ist.

Beweis von A). Aus $f \simeq 0$ folgt $f^*[a] = [a \circ f] = 0$ (vgl. 1.3) für alle $a: Y \rightarrow V$. Zum Nachweis der Umkehrung wähle man $V = Y$; dann ist nach Voraussetzung insbesondere $0 = f^*[1_Y] = [f]$, d.h. $f \simeq 0$.

Beweis von B). Aus $l \circ f \simeq 1$ folgt $f^* \circ l^* = 1$ und daraus die Epimorphie von f^* . Zum Nachweis der Umkehrung wähle man $V = X$. Nach Voraussetzung gibt es dann ein $l: Y \rightarrow V = X$ mit $[1_X] - f^*[l] = [l \circ f]$, d.h. $l \circ f \simeq 1_X$ (vgl. 1.3).

Gibt es ein $r: Y \rightarrow X$ mit $f \circ r \simeq 1_Y$, so folgt $r^* \circ f^* = 1$, d.h.

C) Besitzt $f: X \rightarrow Y$ ein Rechts-Homotopieinverses, so ist $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ für jedes V monomorph⁴⁾.

Im Gegensatz zu A) und B) wäre hier die Umkehrung falsch, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt: Hat $g: S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ ($S^n = n$ -Sphäre) den Grad 1, so ist $g^*: \pi(S^2, V) \rightarrow \pi(S^1 \times S^1, V)$ für jedes V monomorph ([12] 6.4, Satz 5); es gibt aber kein Rechts-Homotopieinverses zu g , denn jede Abbildung $S^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ ist nullhomotop (wegen $\pi(S^2, S^1 \times S^1) = \pi_2(S^1 \times S^1) \cong \pi_2(S^1) + \pi_2(S^1) = 0$, s. STEENROD [15] 17.8 und 21.2 (2)). Mit Hilfe der Abbildungsfolge $\mathcal{A}f$ (vgl. 1.11) kann man unter gewissen Voraussetzungen über X und Y aber doch ein Kriterium für die Monomorphie von f^* finden, das notwendig und hinreichend ist (3.4 Satz 12).

Bemerkung. Die Aussage C) bleibt nach unserem Beweis richtig, wenn man „monomorph“ durch das schärfere „einwertig“ ersetzt. Eine Abbildung heißt einwertig, wenn je zwei verschiedene Elemente verschiedene Bilder haben. Bei der Monomorphie wird nur verlangt, daß kein von 0 verschiedenes Element in 0 übergeht. Tatsächlich gibt es Abbildungen $f: X \rightarrow Y$, deren induzierte Abbildung $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ für alle V monomorph, aber für gewisse V nicht einwertig ist (vgl. 4.1 und 4.6 Beispiel A). Genaueres darüber findet man in § 4; hier steht die Frage nach der Monomorphie im Vordergrund.

3.2. Ist $f: X \rightarrow Y$ die konstante Abbildung von X in den Grundpunkt von Y , so ist $C_f = Y \vee SX$. Das Zeichen $\vee$ bedeutet dabei die topologische Summe mit Identifizierung der Grundpunkte, d.h.

$$A \vee B = (A + B) / \{a_0, b_0\},$$

⁴⁾ Siehe Fußnote ¹⁾ S. 300.

wenn a_0, b_0 die Grundpunkte der Räume A bzw. B sind. Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen von C_f (1.4) und SX (1.8). $Pf: Y \rightarrow Y \vee SX$ (vgl. 1.4) ist die Inklusion und $Qf: Y \vee SX \rightarrow SX$ [vgl. 1.9 (3)] die natürliche Projektion, bei der Y in den Grundpunkt übergeht. Durchläuft man die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) weiter, so erhält man:

- a) $Sf: SX \rightarrow SY$ ist die konstante Abbildung,
- b) $SPf: SY \rightarrow S(Y \vee SX) = SY \vee S^2X$ ist die Inklusion,
- c) $SQf: S(Y \vee SX) = SY \vee S^2X \rightarrow S^2X$ ist die natürliche Projektion, usw.

[Bei b) und c) wurde von der allgemeinen Beziehung $S(A \vee B) = SA \vee SB$ Gebrauch gemacht, die sich aus den Definitionen unter Benutzung von 1.1 Hilfssatz 1 leicht ergibt.] Da nach 2.4 Satz 9 der Homotopietyp von $\mathfrak{A}f$ nur vom Homotopietyp von f abhängt, folgt:

Satz 10. *Die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) einer nullhomotopen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stimmt bis auf Homotopieäquivalenz mit der aus konstanten Abbildungen, Inklusionen und Projektionen (in periodischem Wechsel) bestehenden Folge*

$$X \rightarrow Y \rightarrow Y \vee SX \rightarrow SX \rightarrow SY \rightarrow SY \vee S^2X \rightarrow \dots$$

überein.

3.3. Satz 11. *Ist die durch $f: X \rightarrow Y$ induzierte Abbildung der Homotopiemengen $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ monomorph für jedes V , so besitzt die Einhängung Sf ein Rechts-Homotopieinverses.*

Beweis. Aus der Monomorphie von f^* folgt wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge (1.12 Satz 6) $(Pf)^* = 0$. Da das für alle V gilt, folgt nach 3.1 A) $Pf \simeq 0$. Wendet man Satz 10 auf $Pf: Y \rightarrow C_f$ (an Stelle von $f: X \rightarrow Y$) an, so ergibt sich, daß QPf mit der natürlichen Projektion $p: C_f \vee SY \rightarrow SY$ homotopieäquivalent ist. Die Inklusion $SY \rightarrow C_f \vee SY$ ist rechts-(homotopie)-invers zu p . Nach 1.11 Satz 5 ist $QPf = P^2Pf$ und $P^3f = Sf$ also $Sf = P^3f = QPf = p$. Mit p hat daher auch Sf ein Rechts-Homotopieinverses.

Satz 11 ist eine „abgeschwächte Umkehrung“ von 3.1 C); denn wenn f ein Rechts-Homotopieinverses besitzt, so auch Sf (aber nicht umgekehrt). Im folgenden Abschnitt wird sich zeigen, daß auch die genaue Umkehrung von Satz 11 richtig ist (3.4 Satz 12), allerdings nicht ohne gewisse Voraussetzungen über die Räume X und Y (vgl. das Beispiel am Schluß von 3.4).

3.4. Satz 12. *Sind X und Y zusammenhängende CW-Komplexe und ist Y einfach zusammenhängend, so induziert $f: X \rightarrow Y$ genau dann Monomorphismen $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ der Homotopiemengen für jeden Bildraum V , wenn die Einhängung Sf ein Rechts-Homotopieinverses besitzt.*

Wir benötigen folgende Hilfssätze, deren Beweise in den nächsten Abschnitten nachgeholt werden:

Hilfssatz 8. *Wenn es zu $Pf: Y \rightarrow C_f$ (für irgendein $f: X \rightarrow Y$, vgl. 1.4) ein Rechts-Homotopieinverses $r: C_f \rightarrow Y$ gibt, so ist die Einhängung $S\varphi$ der durch*

f und r gegebenen Abbildung $\psi: X \vee C_f \rightarrow Y$ (d.h. $\psi|_X = f$, $\psi|_{C_f} = r$) eine Homotopieäquivalenz.

Hilfssatz 9. Sind X und Y zusammenhängende CW-Komplexe und ist Y einfach zusammenhängend, so ist C_f für jedes $f: X \rightarrow Y$ einfach zusammenhängend und zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent.

Wählt man für Y speziell einen Raum, der nur aus dem Grundpunkt besteht, so ist $C_f = SX$ (vgl. 1.8), und man erhält aus Hilfssatz 9:

Folgerung. Ist X ein zusammenhängender CW-Komplex, so ist SX einfach zusammenhängend.

Hilfssatz 10. Für jeden CW-Komplex A gibt es einen natürlichen Isomorphismus $H_q(A) \cong H_{q-1}(SA)$, $q > 0$, der Homologiegruppen zu beliebiger Koeffizientengruppe.

„Natürlich“ bedeutet hier, daß für jede Abbildung $g: A \rightarrow B$ zwischen CW-Komplexen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_q(A) & \cong & H_{q+1}(SA) \\ \downarrow g_* & & \downarrow (Sg)_* \\ H_q(B) & \cong & H_{q+1}(SB) \end{array} \quad q > 0$$

kommutativ ist.

Beweis von Satz 12. Daß die Bedingung für Monomorphie notwendig ist (sogar ohne Voraussetzungen über X und Y), wurde schon in 3.3 Satz 11 festgestellt.

Wir müssen noch zeigen, daß sie hinreichend ist, gehen also davon aus, daß Sf ein Rechts-Homotopieinverses besitzt. Nach 1.11 Satz 5 ist $Sf \equiv P^3f$ und $P^2f \equiv Qf$. Aus letzterem folgt $P^3f \equiv PQf$, wenn man auf beide Seiten den Operator P anwendet (vgl. 2.4 Satz 9). Mit Sf besitzt daher auch PQf ein Rechts-Homotopieinverses. Wir wenden Hilfssatz 8 auf $Qf: C_f \rightarrow SX$ (an Stelle von $f: X \rightarrow Y$) an und erhalten eine Abbildung $\psi: C_f \vee C_{Qf} \rightarrow SX$, für die $\psi|_{C_f} = Qf$ gilt und deren Einhängung $S\psi$ eine Homotopieäquivalenz ist. Die Voraussetzungen über X und Y gestatten es, daraus zu folgern, daß ψ selbst eine Homotopieäquivalenz ist. Stellen wir den Beweis dafür zunächst zurück, so wird folgendermaßen weitergeschlossen:

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_f & \xrightarrow{i} & C_f \vee C_{Qf} \\ & \searrow Qf & \downarrow \psi \\ & & SX \end{array}$$

worin i die Injektion bezeichnet, ist wegen $\psi|_{C_f} = Qf$ kommutativ. Weil ψ (wie wir noch zu zeigen haben) eine Homotopieäquivalenz ist, folgt $Qf \equiv i$. Die natürliche Projektion $C_f \vee C_{Qf} \rightarrow C_f$ ist links-(homotopie-)invers zu i , also besitzt auch Qf ein Links-Homotopieinverses. Nach 3.1 B) ist dann

$$(Qf)^*: \pi(SX, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$$

für jedes V epimorph, und wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}/$ (1.12 Satz 6) folgt nacheinander:

$$(Pf)^* = 0,$$

$$f^* \text{ ist monomorph,}$$

und das war zu beweisen.

Es bleibt zu zeigen, daß $\psi: C_i \vee C_{Q_i} \rightarrow SX$ eine Homotopieäquivalenz ist, wenn $S\psi$ es ist: Wegen $Qf \equiv P^2f$ (1.11 Satz 5) ist

$$\begin{aligned} C_{Qf} &\equiv C_{P^2f} \quad (2.4 \text{ Satz 9 oder Hilfssatz 7}) \\ &\equiv SY \quad (1.11 \text{ Satz 5}). \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 9 ist C_f einfach zusammenhängend und zu einem CW -Komplex homotopieäquivalent. Das gleiche gilt für SX und SY (Folgerung aus Hilfssatz 9) und folglich auch für $C_i \vee C_{Q_i} \equiv C_i \vee SY$. Demnach ist ψ mit einer Abbildung $\psi': A \rightarrow B$ zwischen zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden CW -Komplexen A, B homotopieäquivalent. Aus $\psi \equiv \psi'$ folgt $S\psi \equiv S\psi'$ (vgl. 1.8), d.h. mit $S\psi$ ist auch $S\psi'$ eine Homotopieäquivalenz. Als solche induziert $S\psi'$ Isomorphismen der Homologiegruppen $H_{q+1}(SA) \rightarrow H_{q+1}(SB)$ für alle q . Nach Hilfssatz 10 induziert dann auch ψ' Isomorphismen $H_q(A) \rightarrow H_q(B)$ für alle $q > 0$. Nach einem bekannten Satz von J. H. C. WHITEHEAD ([19] Th. 3) folgt daraus, daß ψ' eine Homotopieäquivalenz ist. Wegen $\psi \equiv \psi'$ ist der Beweis von Satz 12 damit beendet.

Daß die Voraussetzungen über X und Y in Satz 12 nicht entbehrlich sind, zeigt folgendes Beispiel: X bestehe nur aus dem Grundpunkt x_0 , und Y sei ein zusammenhängender CW -Komplex mit $H_q(Y) = 0$ für alle $q > 0$, der aber nicht einfach zusammenhängend ist. (Ist M^3 ein Poincaréscher Raum, vgl. SEIFERT-THRELFALL [13] S. 218 und e^3 eine 3-Zelle einer Zerlegung von M^3 , so hat z.B. $Y = M^3 - e^3$ die geforderten Eigenschaften.) Die Abbildung $f: X = \{x_0\} \rightarrow y_0 \in Y$ induziert nicht für jedes V einen Monomorphismus $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$; denn z.B. für $V = Y$ ist $[1_Y] \neq 0$ aber $f^*[1_Y] = [f] = 0$. Die Einhängung Sf besitzt jedoch trotzdem ein Rechts-Homotopieinverses, ja sie ist sogar eine Homotopieäquivalenz nach J. H. C. WHITEHEAD [19] Th. 3, denn SY ist ebenso wie SX einfach zusammenhängend (Folgerung aus Hilfssatz 9), und Sf induziert Isomorphismen der (trivialen) Homologiegruppen (vgl. Hilfssatz 10).

3.5. Beweis von Hilfssatz 8. Bezeichnet $i: X \rightarrow X \vee C_f$ die Injektion, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & X \vee C_f \\ 1_X \downarrow & & \downarrow \psi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

nach Definition von ψ kommutativ. Also ist $(1_X, \psi)$ eine Transformation von i in f (vgl. 2.1) und induziert nach 2.2 die Transformation $(1_X, \psi, \chi,$

$S1_X, S\psi, \dots$) der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}i$ in $\mathfrak{A}f$ mit $\chi = C(1_X, \psi): C_i \rightarrow C_f$. Offenbar ist $C_i = CX \vee C_f$. Nach Definition von χ [2.2 (9)] gilt $\chi|(X \vee C_f) = Pf \circ r$, also insbesondere $\chi|C_f = Pf \circ r$. Nach Voraussetzung ist diese Abbildung zur Identität von C_f homotop. Ist $j: C_f \rightarrow CX \vee C_f$ die Injektion, so gilt also

$$\chi \circ j = \chi|C_f \simeq 1_{C_f}.$$

Weil sich CX auf den Grundpunkt zusammenziehen läßt, ist j eine Homotopieäquivalenz, und folglich auch χ . Da demnach die beiden in $(1_X, \psi, \chi, S1_X, S\psi, \dots)$ aufeinanderfolgenden Abbildungen χ und $S1_X = 1_{SX}$ Homotopieäquivalenzen sind, ist es nach 2.4 Satz 8b) auch die nächste Abbildung $S\psi$, und Hilfssatz 8 ist bewiesen.

Hilfssatz 9 läßt sich mit geläufigen Methoden leicht beweisen, und Hilfssatz 10 ist bekannt, aber anscheinend nirgends in dieser Form veröffentlicht. Der Vollständigkeit halber führen wir die Beweise aus:

3.6. Beweis von Hilfssatz 9. Sind X, Y CW-Komplexe⁵⁾, so gibt es zu jeder Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine homotope Zellenabbildung $f': X \rightarrow Y$, d.h. eine Abbildung f' , die jedes Gerüst $X^{(q)}$ (Vereinigung aller Zellen von X , deren Dimension höchstens q ist) in das entsprechende Gerüst $Y^{(q)}$ von Y abbildet (J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (I)). Homotope Abbildungen sind insbesondere homotopieäquivalent, also folgt aus 2.4 Hilfssatz 7: $C_f \simeq C_{f'}$. Für den Beweis von Hilfssatz 9 kann man sich daher auf den Fall beschränken, daß f schon eine Zellenabbildung ist:

Wir setzen $\tilde{C}X = (X \times I)/(X \times 0)$ und betrachten an Stelle von C_f zunächst den Raum $\tilde{C}_f$, der aus $\tilde{C}X + Y$ entsteht, wenn man $(x, 1) \in \tilde{C}X$ für jedes $x \in X$ mit $f(x) \in Y$ identifiziert. $(x_0, 1) = y_0$ sei der Grundpunkt von $\tilde{C}_f$. $x_0 \times I$ läßt sich als Teilraum von $\tilde{C}_f$ auffassen, und es gilt $\tilde{C}_f/(x_0 \times I) = C_f$ (vgl. 1.4). Aus den Zellenzerlegungen von X und Y erhält man in natürlicher Weise Zellenzerlegungen von $X \times I$, $\tilde{C}X$ und schließlich von $\tilde{C}_f$; $\tilde{C}_f$ ist mit dieser Zerlegung ein CW-Komplex, weil f eine Zellenabbildung sein sollte (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [19] § 5 (H) und § 8), und $x_0 \times I$ ist offenbar ein Teilkomplex. Folglich ist auch $C_f = \tilde{C}_f/(x_0 \times I)$ ein CW-Komplex. Weil $x_0 \times I$ zusammenziehbar ist und sich eine solche Zusammenziehung zu einer Homotopie der Identität von $\tilde{C}_f$ fortsetzen läßt (vgl. 1.6), folgt aus 1.2 Hilfssatz 3:

Die natürliche Projektion

$$p: \tilde{C}_f \rightarrow \tilde{C}_f/(x_0 \times I) = C_f$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Es braucht nun nur noch gezeigt zu werden, daß $\tilde{C}_f$ einfach zusammenhängend ist. Hierzu ist die Voraussetzung, daß X und Y CW-Komplexe sind, übrigens nicht mehr erforderlich. Die Teilmengen $U = \tilde{C}_f - \{(x_0, 0)\}$ und $V = \tilde{C}_f - Y = \tilde{C}X - X \times 1$ bilden eine offene Überdeckung von $\tilde{C}_f$ (Fig. 5). $w: I \rightarrow \tilde{C}_f$ sei ein geschlossener Weg mit dem Anfangspunkt $y_0 \in Y \subset \tilde{C}_f$.

⁵⁾ Siehe Fußnote ³⁾ S. 307.

Nach dem Ausschneidungssatz für die Homologiegruppen („excision property“, vgl. EILENBERG-STEENROD [5] Chap. VII, Th. 9.1) ist

$$(23) \quad H_{q+1}(\tilde{C}A, U_1) \cong H_{q+1}(\tilde{C}A - U_2, U_1 - U_2).$$

Setzt man (22) mit (23) zusammen und verfährt man für $\tilde{S}A$ analog, so erhält man das kommutative Diagramm

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} H_{q-1}(\tilde{C}A, A) & \cong & H_{q-1}(\tilde{C}A - U_2, U_1 - U_2) \\ \tilde{p}_* \downarrow & & \downarrow (\tilde{p}|(\tilde{C}A - U_2))_* \\ H_{q-1}(\tilde{S}A, (a_0, 1)) & \cong & H_{q-1}(\tilde{S}A - \tilde{p}(U_2), \tilde{p}(U_1 - U_2)). \end{array}$$

Weil $\tilde{p}|(\tilde{C}A - U_2)$ eine Homöomorphie ist, ist $(\tilde{p}|(\tilde{C}A - U_2))_*$ und daher auch $\tilde{p}_*$ ein Isomorphismus.

§ 4. Algebraische Strukturen in $\pi(X, V)$

4.1. In § 3 wurde untersucht, wann eine Abbildung $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ zwischen Homotopiemengen, die durch $f: X \rightarrow Y$ induziert wird, monomorph ist. Es wurde schon erwähnt, daß dabei Monomorphie nicht mit Einwertigkeit äquivalent ist (3.1 Bemerkung). Sei z. B. $X = S^3$, $Y = V = S^2$, d. h. $\pi(Y, V) = \pi_2(S^2) \cong Z$ (= Gruppe der ganzen Zahlen) und $\pi(X, V) = \pi_3(S^2) \cong Z$ (vgl. STEENROD [15] 21.2). Hat $f: S^3 \rightarrow S^2$ die Hopfsche Invariante 1 (vgl. H. HOPF [7]) und $a_n: S^2 \rightarrow S^2$ den Grad n , so hat $a_n \circ f$ die Hopfsche Invariante n^2 ([7] Satz IIb'). Da die Hopfsche Invariante einer Abbildung $S^3 \rightarrow S^2$ ihre Homotopieklasse bestimmt, gilt einerseits

$$f^*[a_n] = [a_n \circ f] = [a_{-n} \circ f] = f^*[a_{-n}];$$

andererseits ist nur dann $f^*[a_n] = 0$, wenn $n = 0$, also $[a_n] = 0$ ist. Demnach ist f^* monomorph, bildet aber $[a_n]$ und $[a_{-n}]$, die für $n \neq 0$ voneinander verschieden sind, in dasselbe Element ab.

Im Gegensatz zu diesem Beispiel gilt

GM: $f^{*-1}f^*[a]$ besitzt für jedes $[a] \in \pi(Y, V)$ die gleiche Mächtigkeit,

sicher dann, wenn es in $\pi(X, V)$ und $\pi(Y, V)$ Gruppenstrukturen gibt, so daß $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ ein Homomorphismus ist. Wir werden in diesen Paragraphen einige Bemerkungen über algebraische Strukturen in den Abbildungsmengen sowie über die Gültigkeit von *GM* machen. Unter anderem ergänzen wir dabei die Ergebnisse von § 3 in bezug auf die Frage nach der Einwertigkeit.

4.2. Für Abbildungen $\alpha, \beta: SX \rightarrow V$ (SX ist die Einhängung von X , vgl. 1.8) liegt es nahe eine „Addition“ durch

$$(25) \quad (\alpha + \beta)(x, s) = \begin{cases} \alpha(x, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(x, 2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, s) \in SX$$

zu definieren. Es ist bekannt und man bestätigt ohne Schwierigkeiten, daß diese Verknüpfung beim Übergang zu den Homotopieklassen eine Gruppenoperation in $\pi(SX, V)$ induziert. Wir schreiben sie wieder additiv, obwohl sie nicht abelsch zu sein braucht [Beispiel: $\pi(SS^0, V) = \pi_1(V) =$ Fundamentalgruppe von V].

Für die Einhängung einer Abbildung $Sf: SX \rightarrow SY$ gilt

$$(\alpha + \beta) \circ Sf = \alpha \circ Sf + \beta \circ Sf,$$

wie man aus der Definition (25) unmittelbar entnimmt. Folglich induziert Sf einen Homomorphismus

$$(Sf)^*: \pi(SY, V) \rightarrow \pi(SX, V) \quad (\text{vgl. 1.3}).$$

Die durch die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (vgl. 1.11) induzierte exakte Folge von Homotopiemengen (vgl. 1.12)

$$(26) \quad \pi(X, V) \xleftarrow{f^*} \pi(Y, V) \xleftarrow{(Pf)^*} \pi(C_f, V) \xleftarrow{(Qf)^*} \pi(SX, V) \xleftarrow{(Sf)^*} \dots$$

besteht demnach von der vierten Stelle an aus Gruppen und Homomorphismen. Beschränkt man sich auf diesen Teil und nimmt man für f eine Injektion $X \subset Y$, bei der die Homotopieerweiterungseigenschaft HE von 1.6 erfüllt ist, so erhält man die „track group sequence“ von BARRATT [I] für das Raumtripel $\{x_0\} \subset X \subset Y$. Nach 1.6 Satz 2 ist nämlich $C_f \equiv Y/X$, folglich $S^n C_f \equiv S^n(Y/X)$ und daher $\pi(S^n C_f, V) \cong \pi(S^n(Y/X), V)$.

$$\pi(S^n X, V), \quad \pi(S^n Y, V) \quad \text{und} \quad \pi(S^n(Y/X), V)$$

sind aber gerade die Barrattschen track groups

$$(X, x_0)^n(V, v_0; v_0), \quad (Y, x_0)^n(V, v_0; v_0) \quad \text{bzw.} \quad (Y, X)^n(V, v_0; v_0).$$

Die track group sequence für ein Raumtripel $A \subset B \subset C$ mit beliebigem A erhält man, falls A nicht leer ist, aus der Abbildungsfolge von $B/A \subset C/A$. Wenn A leer ist, kann man $\emptyset \subset B \subset C$ durch $\{a_0\} \subset B + \{a_0\} \subset C + \{a_0\}$ ersetzen, ohne die track group sequence zu ändern, und damit diesen Fall auf den vorigen zurückführen. Unsere exakte Folge von Homotopiemengen (26) verallgemeinert und verlängert also die track group sequence.

4.3. Wir werden hier auch an der dritten Stelle der Folge (26) eine algebraische Struktur definieren nämlich eine Operation von $\pi(SX, V)$ in $\pi(C_f, V)$. Für $\alpha: SX \rightarrow V$, $a: C_f \rightarrow V$ wird $\alpha \top a: C_f \rightarrow V$ durch

$$(27) \quad \begin{cases} (\alpha \top a)(x, s) = \begin{cases} \alpha(x, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ a(x, 2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} & x \in X, s \in I \\ (\alpha \top a)(y) = a(y), & y \in Y \end{cases}$$

definiert (Fig. 6). Durch Übergang zu den Homotopieklassen ergibt sich eine Verknüpfung $\pi(SX, V) \times \pi(C_f, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$, die wir auch mit $\top$ bezeichnen

und die folgenden Regeln genügt ($[\alpha], [\beta] \in \pi(SX, V)$, $[a], [b] \in \pi(C_f, V)$):

A) $[\alpha] \top ([\beta] \top [a]) = ([\alpha] + [\beta]) \top [a],$

B) $0 \top [a] = [a],$

C) $[\alpha] \top (Qf)^*[\beta] = (Qf)^*([\alpha] + [\beta]).$

Man bestätigt diese Regeln sehr leicht anhand der Definitionen (25) und (27). Bei C) sei daran erinnert, daß $Qf: C_f \rightarrow C_f/Y = SX$ die natürliche Projektion

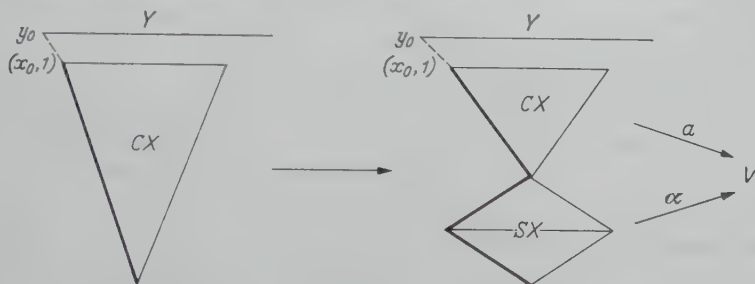


Fig. 6. Jede stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen

ist (1.9). Ist $[\alpha] \top [a] = [\alpha] \top [b]$, so folgt aus A) und B):

$$\begin{aligned} [a] &= 0 \top [a] = (-[\alpha] + [\alpha]) \top [a] = (-[\alpha]) \top ([\alpha] \top [a]) \\ &= (-[\alpha]) \top ([\alpha] \top [b]) = [b], \end{aligned}$$

also

D) Die Zuordnung $[a] \rightarrow [\alpha] \top [a]$ definiert für jedes $[\alpha]$ eine einwertige Abbildung.

Aus C) folgt insbesondere:

E) $[\alpha] \top 0 = (Qf)^*[\alpha].$

4.4. Mit Hilfe von 4.3 kann man die Frage, wann zwei Elemente von $\pi(SX, V)$ durch $(Qf)^*$ in dasselbe Element von $\pi(C_f, V)$ abgebildet werden, auf die Frage nach Kern $(Qf)^* = \text{Bild } (Sf)^*$ (vgl. 1.12 Satz 6) zurückführen:

$$\begin{aligned} (Qf)^*[\alpha] &= (Qf)^*[\beta] \text{ ist nach 4.3 D) mit} \\ (-[\alpha]) \top (Qf)^*[\alpha] &= (-[\alpha]) \top (Qf)^*[\beta] \end{aligned}$$

äquivalent. Nach 4.3 C) ist die rechte Seite hiervon $(Qf)^*(-[\alpha] + [\beta])$ und die linke $(Qf)^*(-[\alpha] + [\alpha]) = 0$. $[\alpha]$ und $[\beta]$ haben also genau dann das gleiche Bild bei $(Qf)^*$, wenn

$$-[\alpha] + [\beta] \in \text{Kern } (Qf)^* = \text{Bild } (Sf)^*$$

ist. Insbesondere hat $(Qf)^{-1}(Qf)^*[\alpha]$ für jedes $[\alpha] \in \pi(SX, V)$ die gleiche Mächtigkeit, und zwar die Mächtigkeit von $\text{Bild } (Sf)^*$.

Das gleiche gilt für jede Abbildung, die zu Qf homotopieäquivalent ist (zur Definition vgl. 1.2), da eine Homotopieäquivalenz zwischen topologischen

Räumen einen Isomorphismus zwischen den entsprechenden Homotopiemengen induziert. Wir fassen zusammen:

Satz 13. Ist $f: X \rightarrow Y$ für eine geeignete Abbildung f' mit $Qf' (= P^2f'$, vgl. 1.11 Satz 5) homotopieäquivalent, so gilt GM (vgl. 4.1) für die induzierte Abbildung $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ (V beliebig), d.h. für jedes $[\alpha] \in \pi(Y, V)$ hat $f^{*-1}f^*[\alpha]$ die gleiche Mächtigkeit. Ist insbesondere f^* monomorph, so ist es sogar einwertig.

Als Beispiel betrachten wir einen Raum $Y \cup e^n$, der aus Y durch Anheften einer n -Zelle entsteht, d.h. $Y \cup e^n = C_{f'}$ für geeignetes $f': S^{n-1} \rightarrow Y$ (vgl. das Beispiel in 1.4). Die natürliche Projektion $f: Y \cup e^n \rightarrow (Y \cup e^n)/Y = S^n$ ist nichts anderes als Qf' (vgl. 1.9). Folglich gilt GM für f^* . Wir werden einen Spezialfall dieses Beispiels, nämlich den Fall, daß $Y \cup e^n$ eine n -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ist, im zweiten Teil der Arbeit [12] noch einmal aufgreifen.

4.5. Untersucht man die in 4.4 behandelte Frage für $Pf: Y \rightarrow C_f$ (vgl. 1.4) an Stelle von Qf , so ergibt sich:

Für $a, b: C_f \rightarrow V$ ist genau dann $(Pf)^*[a] = (Pf)^*[b]$, wenn es ein $\alpha: SX \rightarrow V$ mit $[\alpha] \top [a] = [b]$ gibt.

Beweis. $Pf: Y \rightarrow C_f$ ist die Inklusion, also gilt $(Pf)^*[a] = [a|Y]$, und aus der Definition (27) folgt

$$(Pf)^*([\alpha] \top [a]) = (Pf)^*[a].$$

Das beweist die Implikation in der einen Richtung.

Sei nun umgekehrt $(Pf)^*[a] = (Pf)^*[b]$, d.h. $a|Y \simeq b|Y$ vorausgesetzt. Nach 1.9 Hilfssatz 6 hat (C_f, Y) die Homotopieerweiterungseigenschaft HE von 1.6, folglich gibt es ein $b': C_f \rightarrow V$ mit $b' \simeq b$ und $b'|Y = a|Y$. Wegen der Identifizierung $CX \ni (x, 1) = f(x) \in Y$ in C_f folgt $b'(x, 1) = a(x, 1)$ für alle $x \in X$. Daher definiert die Festsetzung

$$\alpha(x, s) = \begin{cases} b'(x, 2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ a(x, 2 - 2s), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Abbildung $\alpha: SX \rightarrow V$. Man zeigt leicht $\alpha \top a \simeq b'$ (vgl. Fig. 6); denn $Y \subset C_f$ wird durch $\alpha \top a$ und b' gleich abgebildet, und der Weg $(\alpha \top a)|I_x$ mit $I_x = \{(x, s) | s \in I\} \subset C_f$ setzt sich aus $b'|I_x$, dem zu $a|I_x$ inversen Weg und dem Weg $a|I_x$ selbst zusammen. Aus $\alpha \top a \simeq b'$ und $b' \simeq b$ folgt die Behauptung $[\alpha] \top [a] = [b]$.

Das hiermit bewiesene Kriterium läßt sich auch in der Form

$$(28) \quad (Pf)^{-1}(Pf)^*[a] = \pi(SX, V) \top [a] \quad \text{für alle } [a] \in \pi(C_f, V)$$

ausdrücken. Man kann daraus jedoch nicht etwa folgern, daß $(Pf)^{-1}(Pf)^*[a]$ für jedes $[a]$ gleiche Mächtigkeit hat. Es kann sogar vorkommen, daß $(Pf)^{-1}(Pf)^*[a]$ für $[a] = 0$ nur ein Element, für ein gewisses anderes $[a]$ aber unendlich viele Elemente besitzt — und umgekehrt. Das zeigen die folgenden Beispiele.

4.6. Beispiel A. $f: S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ sei die Injektion des ersten Faktors, d.h. $f(x) = (x, x_0)$ für alle $x \in S^1$. C_f besteht dann aus dem Torus $S^1 \times S^1$ und einer 2-Zelle e^2 (vgl. Fig. 7 und das Beispiel in 1.4). Die Projektion $p_1: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$ auf den ersten Faktor ist links-(homotopie-)invers zu f , folglich $S p_1$ links-(homotopie-)invers zu $S f$. Nach 3.1 B) ist dann $(S f)^*: \pi(S(S^1 \times S^1), V) \rightarrow \pi(S S^1, V)$ epimorph. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathcal{A}$ (1.12 Satz 6) folgt nacheinander: $(Q f)^* = 0$ und

$$(29) \quad \text{Kern}(P f)^* = 0.$$

Das gilt für jedes V .

Sei andererseits $V = S^1 \vee S^2$ (zur Definition vgl. 3.2). Wir definieren $a: C_f \rightarrow V$ durch

$$a|(S^1 \times S^1) = i \circ p_2$$

$$a(e^2) = v_0 = \text{Grundpunkt von } V = S^1 \vee S^2,$$

wobei $i: S^1 \rightarrow S^1 \vee S^2$ die Injektion und $p_2: S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist, und werden zeigen:

Hilfssatz 12. Die Zuordnung $[\alpha] \rightarrow [\alpha] \top [a]$ definiert eine einwertige Abbildung $\pi(S S^1, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$.

Daraus folgt, daß

$$(P f)^{* -1} (P f)^* [a] = \pi(S S^1, V) \top [a]$$

[vgl. 4.5 (28)] ebenso viele Elemente hat wie $\pi(S S^1, V) = \pi_2(S^1 \vee S^2)$, also abzählbar unendlich viele, während $(P f)^*$ nach (29) monomorph ist.

Beweis von Hilfssatz 12. Wir müssen zeigen, daß für jedes Paar $\alpha, \beta: S S^1 = S^2 \rightarrow V = S^1 \vee S^2$ mit $\alpha \neq \beta$ auch $\alpha \top a \neq \beta \top a$ ist. Dazu denken wir uns C_f aus der Randsphäre S^2 von $E^2 \times I$ ($E^2 =$ abgeschlossene Kreisscheibe) durch Identifizieren von $E^2 \times 0$ mit $E^2 \times 1$ entstanden (Fig. 7). $p: S^2 \rightarrow C_f$ sei die natürliche Projektion. Nach Definition von $\alpha \top a$ [vgl. (27) und Fig. 6] repräsentiert $(\alpha \top a) \circ p|(x \times I)$ für jedes x aus dem Rand von E^2 eine Erzeugende $[i] = i \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$, und

$$(\alpha \top a) \circ p|(E^2 \times 0) = (\alpha \top a) \circ p|(E^2 \times 1)$$

repräsentiert $[\alpha] \in \pi_2(S^1 \vee S^2)$. Folglich ist $[(\alpha \top a) \circ p]$ das Whitehead-Produkt $[[\alpha], i]$ (vgl. [18] § 3). Es genügt nun zu zeigen, daß für $\xi = [\alpha] - [\beta] \neq 0$ auch

$$[[\alpha], i] - [[\beta], i] = [\xi, i] \neq 0$$

ist (zur Bilinearität des Whitehead-Produkts vgl. [18] Th. 1 und 3.3). Nach [18] 3.2 ist $[\xi, i] = i \cdot \xi - \xi$, wobei $i \cdot \xi$ das Bild von ξ bei Anwendung der Operation $i \in \pi_1(S^1 \vee S^2)$ bezeichnet. Sei $\tilde{V}$ die universelle Überlagerung von $V = S^1 \vee S^2$. Die Operation i in $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ wird, wenn man $\pi_2(S^1 \vee S^2)$ mit $\pi_2(\tilde{V})$ identifiziert, durch die zu i gehörende Deckbewegung d_i von $\tilde{V}$ induziert (vgl. EILENBERG [4] § 9). $\tilde{V}$ besteht aus einer Geraden (der universellen

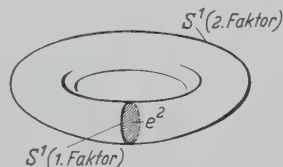


Fig. 7

Überlagerung von S^1), an die abzählbar viele 2-Sphären in konstanten Abständen mit je einem Punkt angeheftet sind (Fig. 8). d_i „verschiebt“ dieses Gebilde um eine Stufe. Daraus entnimmt man leicht, daß die Operation ι kein von 0 verschiedenes Element $\xi \in \pi_2(S^1 \vee S^2) = \pi_2(\tilde{V})$ in sich abbildet, d.h. $[\xi, \iota] = \iota \cdot \xi - \xi \neq 0$.

Beispiel B. Das Produkt $S^5 \times S^6$ kann man aus $S^5 \vee S^6$ (vgl. 3.2) durch Anheften einer 11-Zelle erhalten, d.h. es gibt eine Abbildung $f: S^{10} \rightarrow S^5 \vee S^6$ mit $C_f = S^5 \times S^6$ (vgl. das Beispiel in 1.4). $Pf: S^5 \vee S^6 \rightarrow S^5 \times S^6$ ist dann die

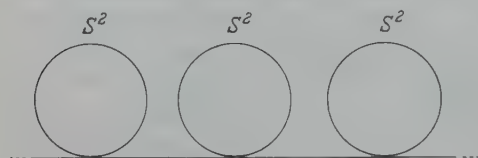


Fig. 8

natürliche Injektion, und wie wir zeigen werden (5.1 Satz 14) ist $(P^2 f)^*: \pi(C_{Pf}, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$ monomorph für jedes V . Wegen $P^2 f \equiv Qf$ (1.9 Satz 3) ist daher auch $(Qf)^*: \pi(S^{10}, V) \rightarrow \pi(C_f, V)$ monomorph und folglich einwertig

(4.4 Satz 13). Also hat Kern $(Pf)^* = \text{Bild } (Qf)^*$ (vgl. 1.12 Satz 6) ebenso viele Elemente wie $\pi(S^{10}, V) = \pi_{11}(V)$. Nimmt man $V = S^6$, so hat Kern $(Pf)^*$ unendlich viele Elemente, denn $\pi_{11}(S^6)$ ist frei zyklisch (SERRE [14]).

Andererseits besteht $(Pf)^{-1}(Pf)^*[a]$ nur aus $[a]$ selbst, wenn $a: S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$ die natürliche Projektion ist.

Beweis. Sei $\mathfrak{G}$ der Raum der Abbildungen $S^6 \rightarrow S^6$ vom Grade 1 (ohne Festlegung eines Grundpunktes) und $\mathfrak{F}$ der Teilraum derjenigen Abbildungen, die den Grundpunkt $y_0 \in S^6$ in sich überführen. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ werden mit der „Kompakt-Offen-Topologie“ versehen (Topologie der kompakten Konvergenz bei BOURBAKI, vgl. [3] § 1, No. 3, III und § 2, Prop. 7), und die Identität $S^6 \rightarrow S^6$ gilt als Grundpunkt. Man erhält eine (natürliche) Abbildung $\omega: \pi_5(\mathfrak{G}) \rightarrow \pi(S^5 \times S^6, S^6)$, wenn man jedem $g: S^5 \rightarrow \mathfrak{G}$ die durch

$$(x, y) \rightarrow g(x)(y) = \text{Bild von } y \in S^6 \text{ bei Anwendung von } g(x) \in \mathfrak{G}$$

gegebene Abbildung $S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$ zuordnet und dann zu den Homotopieklassen übergeht. Bild ω besteht aus den Homotopieklassen von solchen Abbildungen $S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$, deren Einschränkung auf $x_0 \times S^6$ ($x_0 =$ Grundpunkt von S^5) die natürliche Abbildung $x_0 \times S^6 \rightarrow S^6$ [d.h. $(x_0, y) \rightarrow y$] ist. Andererseits ist für $b: S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$ genau dann $[b] \in (Pf)^{-1}(Pf)^*[a]$, wenn $b|(S^5 \vee S^6) \simeq a|(S^5 \vee S^6)$ ist. Weil $S^5 \vee S^6$ Teilkomplex des CW-Komplexes $S^5 \times S^6$ ist, gibt es dann ein $b': S^5 \times S^6 \rightarrow S^6$ mit $b' \simeq b$ und $b'|(S^5 \vee S^6) = a|(S^5 \vee S^6)$. Nach Definition von a ist $a|(x_0 \times S^6): x_0 \times S^6 \rightarrow S^6$ die natürliche Abbildung, also auch $b'|(x_0 \times S^6)$. Folglich gilt:

$$(Pf)^{-1}(Pf)^*[a] \subset \text{Bild } \omega = \omega(\pi_5(\mathfrak{G})).$$

Es genügt nun, $\pi_5(\mathfrak{G}) = 0$ zu beweisen. Dazu betrachten wir die Abbildung $\mathfrak{G} \rightarrow S^6$, definiert durch $g \rightarrow g(y_0)$ für jedes $g \in \mathfrak{G}$. $\mathfrak{G} \rightarrow S^6$ ist eine Faserung mit der Faser $\mathfrak{F}$ (vgl. G. W. WHITEHEAD [16] (2.1)). Zu ihr gehört die exakte

Homotopiefolge

$$(30) \quad \dots \rightarrow \pi_6(S^6) \xrightarrow{e} \pi_5(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_5(\mathcal{Y}) \rightarrow \pi_5(S^6) = 0.$$

Nach [16] (2.10) ist $\pi_5(\tilde{Y}) \cong \pi_{11}(S^6)$. Identifiziert man diese beiden Gruppen, so ist $\varrho(\xi)$ für jedes $\xi \in \pi_6(S^6)$ bis auf das Vorzeichen das Whitehead-Produkt $[\iota, \xi]$ (zur Definition s. [18] § 3), wobei ι eine Erzeugende von $\pi_6(S^6)$ ist (vgl. [16] (3.2) und die Berichtigung von J. H. C. WHITEHEAD [20] (3.1)). $\pi_{11}(S^6)$ ist frei zyklisch (SERRE [14]) und wird von $[\iota, \iota]$ erzeugt; denn $[\iota, \iota]$ hat die Hopfsche Invariante 2 (G. W. WHITEHEAD [17] (3.49)), und $\pi_{11}(S^6)$ enthält nach [17] § 9 nur Elemente mit gerader Hopfscher Invariante. Daraus folgt, daß ϱ epimorph, also wegen der Exaktheit von (30) $\pi_5(\mathcal{Y}) = 0$ ist.

§ 5. Produkte

5.1. Die Abbildungsfolge (vgl. 1.11) erweist sich als ein nützliches Hilfsmittel für den Beweis einer zuerst von HILTON angegebenen Formel für die Einhängung eines topologischen Produkts von zwei Räumen. Nachher werden wir diese Formel auf mehrere Faktoren verallgemeinern.

Wir identifizieren $X \vee Y$ (zur Definition vgl. 3.2) im folgenden immer mit der Teilmenge $X \times y_0 \cup x_0 \times Y$ des topologischen Produkts $X \times Y$ (x_0, y_0 sind die Grundpunkte von X bzw. Y). Man bestätigt leicht, daß $X \vee Y$ die durch $X \times Y$ induzierte Topologie trägt. $i: X \vee Y \rightarrow X \times Y$ sei die Injektion, (x_0, y_0) sei der gemeinsame Grundpunkt von $X \vee Y$ und $X \times Y$. Bezeichnen wir C_i (vgl. 1.4) mit $X \overline{\wedge} Y$, so lautet die Abbildungsfolge $\mathfrak{U}i$ von i (vgl. 1.11):

$$(31) \quad X \vee Y \xrightarrow{i} X \times Y \xrightarrow{P_i} X \overline{\wedge} Y \xrightarrow{Q_i} SX \vee SY \xrightarrow{S_i} S(X \times Y) \rightarrow \dots$$

[Dabei wurde von der allgemeinen Beziehung $S(X \vee Y) = SX \vee SY$ Gebrauch gemacht, vgl. 3.2.]

Hilfssatz 13. Für irgend zwei Räume X, Y ist in (31): $Q_i \simeq 0$.

Der Beweis wird im nächsten Abschnitt geführt. Als Folgerungen erhält man:

Satz 14. Für irgend zwei Räume X, Y induziert die Injektion $P_i: X \times Y \rightarrow X \overline{\wedge} Y$ Monomorphismen der Homotopiemengen (zur Definition s. 1.3)

$$(P_i)^*: \pi(X \overline{\wedge} Y, V) \rightarrow \pi(X \times Y, V)$$

für jedes V .

Satz 15. Für irgend zwei Räume X, Y gilt

$$S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \overline{\wedge} Y).$$

Beweis von Satz 14. Aus Hilfssatz 13 folgt $(Q_i)^* = 0$ [vgl. 3.1 A)]. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{U}i$ (1.12 Satz 6) ergibt sich daraus die Behauptung.

Beweis von Satz 15. Aus Hilfssatz 13 folgt

$$C_{Q_i} \equiv SX \vee SY \vee S(X \overline{\wedge} Y)$$

(man setze $f = Qi$ in 3.2 Satz 10). Andererseits ist $Qi \equiv P^2i$ (1.11 Satz 5), also $C_{Qi} \equiv C_{P^2i}$ (2.4 Satz 9) und schließlich $C_{P^2i} \equiv S(X \times Y)$ (1.11 Satz 5).

5.2. Beweis von Hilfssatz 13. Ist $i: A \hookrightarrow B$ irgendeine Injektion, so läßt sich C_i als die Teilmenge

$$\{(b, s) \mid b \in A, s \in I \quad \text{oder} \quad b \in B, s = 1\}$$

von CB auffassen (vgl. 1.4). C_i hat zwar im allgemeinen nicht die durch CB induzierte Topologie (z.B. wenn $B \dashv I$ und A nicht abgeschlossen ist), aber

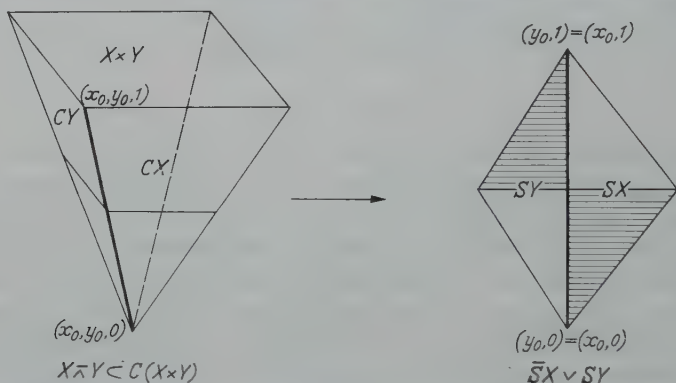


Fig. 9. Schraffierte Teile und stark ausgezogene Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

die Injektion $j: C_i \rightarrow CB$ ist jedenfalls stetig [da ihre Zusammensetzung mit der Identifizierung $(A \times I) + B \rightarrow C_i$ stetig ist]. Insbesondere haben wir für $A = X \vee Y$, $B = X \times Y$ die stetige Injektion $j: X \bar{\cap} Y \rightarrow C(X \times Y)$.

$Qi: X \bar{\cap} Y \rightarrow SX \vee SY$ ist die natürliche Projektion, d.h.

$$(32) \quad \begin{cases} Qi(x, y_0, s) = (x, s) \in SX, & x \in X, s \in I \\ Qi(x_0, y, s) = (y, s) \in SY, & y \in Y, s \in I \\ Qi(x, y, 1) = \text{Grundpunkt}, & x \in X, y \in Y \end{cases}$$

[vgl. 1.9 (3)]. Sei

$$\bar{S}X = SX / \{(x, s) \mid x \in X, s \leq \frac{1}{2}\}$$

$$\underline{S}Y = SY / \{(y, s) \mid y \in Y, s \geq \frac{1}{2}\}$$

(vgl. Fig. 9). Man konstruiert leicht eine Homotopie der Identität von SX , die $\{(x, s) \mid x \in X, s \leq \frac{1}{2}\}$ in sich zusammenzieht, woraus nach 1.2 Hilfssatz 3 folgt, daß die natürliche Projektion $SX \rightarrow \bar{S}X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Das gleiche zeigt man für $SY \rightarrow \underline{S}Y$, und da SX, SY in $SX \vee SY$ nur den Grundpunkt gemeinsam haben (der bei allen Abbildungen und Homotopien erhalten bleibt), folgt: Die natürliche Projektion

$$p: SX \vee SY \rightarrow \bar{S}X \vee \underline{S}Y$$

ist eine Homotopieäquivalenz.

Durch die Zuordnung

$$(x, y, s) \rightarrow \begin{cases} (y, s), & s \leq \frac{1}{2} \\ (x, s), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

wird eine Abbildung $C(X \times Y) \rightarrow \bar{S} X \vee \underline{S} Y$ definiert (Fig. 9), deren Zusammensetzung mit der Injektion $j: X \bar{\cap} Y \rightarrow C(X \times Y)$ gleich $p \circ Qi$ [vgl. (32)] ist. Weil $C(X \times Y)$ zusammenziehbar ist, folgt $p \circ Qi \simeq 0$ und daher — weil p eine Homotopieäquivalenz ist —: $Qi \simeq 0$.

5.3. Nach einem Vorschlag von HILTON wird

$$X \wedge Y = (X \times Y) / (X \vee Y)$$

gesetzt („reduced join“ bei JAMES [10] § 14). Als Grundpunkt in $X \wedge Y$ nehmen wir den Bildpunkt von $X \vee Y$ bei der Identifizierung. Das $\wedge$ -Produkt ist offenbar kommutativ, jedoch im allgemeinen nicht assoziativ (vgl. 5.8). Es ist „funktoriell“, d.h.

A) $f: X \rightarrow X'$ und $g: Y \rightarrow Y'$ induzieren $f \wedge g: X \wedge Y \rightarrow X' \wedge Y'$, definiert durch $(f \wedge g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

Aus 1.1 Hilfssatz 1 folgt:

B) Sind $f_i: X \rightarrow X'$ und $g_i: Y \rightarrow Y'$ ($i \in I$) Homotopien (d.h. stetig in allen Variablen), so gilt das gleiche für $f_i \wedge g_i$.

Aus A) und B) entnimmt man leicht:

C) Der Homotopietyp von $X \wedge Y$ hängt nur vom Homotopietyp der „Faktoren“ X, Y ab.

Beispiele:

$$(33) \quad \begin{cases} X \wedge S^0 = X \\ X \wedge I = CX \\ X \wedge S^1 = SX \end{cases}$$

($S^n = n$ -Sphäre).

Zwischen der $\wedge$ - und der $\bar{\cap}$ -Operation (vgl. 5.1) besteht ein enger Zusammenhang. Sind z.B. X und Y abzählbare CW-Komplexe (d.h. sie besitzen höchstens abzählbar viele Zellen), so ist auch $X \times Y$ ein CW-Komplex (vgl. JAMES [9] Th. 1.9 oder MILNOR [11] 2.1) und $X \vee Y$ ist ein Teilkomplex [vorausgesetzt, daß die Grundpunkte in X, Y zugleich 0-Zellen sind, vgl. Fußnote ³⁾, S. 307]. Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe (vgl. 1.6) erhält man aus 1.6 Satz 2:

$$X \wedge Y \equiv X \bar{\cap} Y.$$

Wir werden sehen, daß das sogar unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen gilt, die nur die Umgebung der Grundpunkte betreffen und insbesondere für alle CW-Komplexe erfüllt sind (5.6 Satz 16).

5.4. $X \vee I$ (mit dem Grundpunkt $x_0 = 0 \in I$) ist mit X homotopieäquivalent. Nimmt man in $X \vee I$ jedoch $1 \in I < X \vee I$ als Grundpunkt — wir bezeichnen

den Raum dann mit $\tilde{X}$ —, so kann sich der Homotopietyp (im Sinne von 1.2) ändern.

Hilfssatz 14. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- a) $X \equiv \tilde{X}$.
- b) *Die natürliche Projektion $\tilde{X} \rightarrow X$ (Identifizieren von I zu einem Punkt) ist eine Homotopieäquivalenz.*
- c) *Es gibt eine Homotopie der Identität von $\tilde{X}$, die I in sich auf den Punkt 1 zusammenzieht. ($1 \in I$ bleibt als Grundpunkt während der Homotopie immer fest.)*
- d) *Es gibt eine Umgebung U des Grundpunktes x_0 von X , die sich in X auf x_0 zusammenziehen läßt, und eine stetige Funktion $u: X \rightarrow I$ mit $u(x_0) = 1$ und $u(x) = 0$ für $x \notin U$.*

Beweis. a) folgt offenbar aus b), und b) folgt nach 1.2 Hilfssatz 3 aus c).

Sind die Abbildungen $f: \tilde{X} \rightarrow X$ und $g: X \rightarrow \tilde{X}$ homotopieinvers zueinander, so erfüllt $U = g^{-1}(I)$ die Bedingung d): Die Injektion $U \rightarrow X$ ist nullhomotop, weil sie zu $f \circ g|_U$ homotop ist und $g|_U \simeq 0$ gilt. Die Zusammensetzung von g mit der natürlichen Projektion $\tilde{X} (= X \vee I) \rightarrow \tilde{X}/X = I$ liefert eine Funktion $u: X \rightarrow I$ mit den gewünschten Eigenschaften. Damit ist d) aus a) gefolgert.

Es bleibt zu zeigen: d) impliziert c). Ausgehend von U und u kann man leicht eine abgeschlossene Umgebung U' von x_0 konstruieren, die wieder die gleichen Eigenschaften hat. Man setzt etwa $U' = \{x | u(x) \geq \frac{1}{2}\} \subset U$ und $u' = \text{Max}(2u - 1, 0)$. Wir können daher von vornherein annehmen, daß U abgeschlossen ist. Nach Voraussetzung existiert eine Abbildung $\varphi: U \times I \rightarrow X$ mit

$$\varphi(x, 0) = x, \quad \varphi(x, 1) = x_0, \quad \varphi(x_0, t) = x_0 \quad (x \in U, t \in I).$$

Mit ihrer Hilfe definieren wir zunächst $\varphi': U \times I \rightarrow \tilde{X}$ durch

$$\varphi'(x, t) = \begin{cases} \varphi(x, 2t) & (x \in X \subset \tilde{X}), \quad t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & (x \in I \subset \tilde{X}), \quad t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x \in U, t \in I).$$

Setzt man

$$(h_t|X)(x) = \begin{cases} x, & x \notin U \\ \varphi'(x, t \cdot u(x)), & x \in U \end{cases}$$

$$(h_t|I)(s) = \begin{cases} s, & t \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (1-s)(2-2t), & t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

so erfüllt $h_t: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ die Bedingung c).

5.5. In Anlehnung an 5.4 treffen wir die Definition:

Der Grundpunkt x_0 von X heißt nicht ausgeartet, wenn X die (untereinander äquivalenten) Bedingungen a) bis d) von Hilfssatz 14 erfüllt.

Ist X ein CW-Komplex, so auch $\tilde{X} (= X \vee I)$, und I ist ein Teilkomplex von $\tilde{X}$. (Das ist klar, wenn der Grundpunkt x_0 von X zugleich eine 0-Zelle der Zellerlegung ist. Ist das zunächst nicht der Fall, so erreicht man es

durch geeignete Unterteilung.) Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft der CW-Komplexe (vgl. 1.6) läßt sich die natürliche Zusammenziehung von I auf den Punkt 1 zu einer Homotopie der Identität von X fortsetzen, d.h. die Bedingung c) ist erfüllt, und wir können feststellen:

A) *Kein Punkt eines CW-Komplexes ist ausgeartet.*

Aus $X \equiv X'$ folgt offenbar $\tilde{X} \equiv \tilde{X}'$; es gilt daher [vgl. 5.4a)]:

B) *Ist $X \equiv X'$, so sind die Grundpunkte von X und X' entweder beide ausgeartet oder beide nicht ausgeartet.*

Die Umgebung $U = I$ von $1 \in I \subset \tilde{X}$ erfüllt 5.4 d); folglich gilt:

C) *Der Grundpunkt von $\tilde{X}$ ist nicht ausgeartet (für beliebiges X).*

Da X mit $\tilde{X}$ frei homotopieäquivalent ist (d.h. homotopieäquivalent, wenn nicht verlangt wird, daß die Grundpunkte bei allen Abbildungen und Homotopien erhalten bleiben sollen), folgt aus C):

D) *Zu jedem Raum gibt es einen frei homotopieäquivalenten mit nicht ausgeartetem Grundpunkt.*

Schließlich kann man zeigen:

E) *Haben die bogenweise zusammenhängenden Räume X und X' nicht ausgeartete Grundpunkte und sind sie frei homotopieäquivalent, so sind sie auch homotopieäquivalent im strengen Sinn von 1.2.*

Da diese Eigenschaft im folgenden nicht benutzt wird, führen wir den Beweis hier nicht durch. Er wird in einem Anhang (5.13) nachgeholt.

E) zeigt insbesondere, daß es im Rahmen der Homotopietheorie unwesentlich ist, welchen Punkt eines Raumes man als Grundpunkt wählt, wenn er nur nicht ausgeartet ist.

5.6. Satz 16. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist die natürliche Projektion*

$$p: X \bar{\vee} Y \rightarrow (X \bar{\vee} Y)/C(X \vee Y) = (X \times Y)/(X \vee Y) = X \wedge Y$$

(vgl. 1.6 (1) und die Definitionen von $\bar{\vee}$ und $\wedge$ in 5.1, 5.3) eine Homotopieäquivalenz.

Zusammen mit 5.1 Satz 15 ergibt das:

Folgerung. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte, so gilt*

$$(34) \quad S(X \times Y) \equiv SX \vee SY \vee S(X \wedge Y)$$

(Formel von HILTON).

Beweis von Satz 16. Nach Voraussetzung ist $X \equiv \tilde{X}$, $Y \equiv \tilde{Y}$ [vgl. 5.4 a)].

Wir zeigen zuerst, daß die Projektion $p': \tilde{X} \bar{\vee} \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \wedge \tilde{Y}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dazu genügt es nach 1.6 die Homotopieerweiterungseigenschaft HE für das Paar $(B, A) = (\tilde{X} \times \tilde{Y}, \tilde{X} \vee \tilde{Y})$ nachzuweisen. HE besagt, daß sich jede Abbildung $f: B \times 0 \cup A \times I \rightarrow V$ (V beliebig) mit $f(a_0 \times I) = v_0$ ($a_0, v_0 =$ Grundpunkte von $A \subset B$ bzw. V) zu einer Abbildung $B \times I \rightarrow V$ fortsetzen läßt. [In

der Formulierung in 1.6 ist f durch $f(b, 0) = g_0(b)$, $f(a, t) = h_t(a)$, $b \in B$, $a \in A$, $t \in I$, gegeben.] Für $(B, A) = (\tilde{X} \times \tilde{Y}, \tilde{X} \vee \tilde{Y})$ folgt also HE aus:

Hilfssatz 15. Für beliebige Räume X, Y gibt es eine Retraktion

$$q: \tilde{X} \times \tilde{Y} \times I \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{Y} \times 0 \cup (\tilde{X} \vee \tilde{Y}) \times I.$$

Dieser Hilfssatz wird im folgenden Abschnitt 5.7 bewiesen.

Um das Ergebnis über p' auf p zu übertragen, betrachten wir die natürlichen Projektionen

$$\begin{aligned} p_1: \tilde{X} &\rightarrow \tilde{X}/I = X \\ p_2: \tilde{Y} &\rightarrow \tilde{Y}/I = Y \end{aligned}$$

und setzen

$$\begin{aligned} q &= p_1 \wedge p_2: \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \rightarrow X \wedge Y & [\text{vgl. 5.3 A)]} \\ \bar{q} &= C(p_1 \vee p_2, p_1 \times p_2): \tilde{X} \bar{\wedge} \tilde{Y} \rightarrow X \bar{\wedge} Y & (\text{vgl. 2.2}). \end{aligned}$$

[Dabei ist $p_1 \times p_2: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ durch $(p_1 \times p_2)(x, y) = (p_1(x), p_2(y))$ definiert und $p_1 \vee p_2 = (p_1 \times p_2)|(\tilde{X} \vee \tilde{Y})$.] $\bar{q}$ wird also durch die Transformation $(p_1 \vee p_2, p_1 \times p_2)$ der Injektion $\tilde{X} \vee \tilde{Y} \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{Y}$ in die Injektion $X \vee Y \rightarrow X \times Y$ induziert. Man bestätigt leicht, daß das Diagramm

$$(35) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} \bar{\wedge} \tilde{Y} & \xrightarrow{p'} & \tilde{X} \wedge \tilde{Y} \\ \bar{q} \downarrow & & \downarrow q \\ X \bar{\wedge} Y & \xrightarrow{p} & X \wedge Y \end{array}$$

kommutativ ist. Nach Voraussetzung sind p_1 und p_2 Homotopieäquivalenzen [vgl. 5.4 b)]. Aus 5.3 A) und B) folgt leicht, daß dann auch $q = p_1 \wedge p_2$ eine Homotopieäquivalenz ist. Aus analogen Gründen sind $p_1 \vee p_2$ und $p_1 \times p_2$ Homotopieäquivalenzen, also nach 2.4 Hilfssatz 7 auch $\bar{q}$. Da wir von p' oben gezeigt haben, daß es eine Homotopieäquivalenz ist, folgt aus (35) das gleiche für p , und Satz 16 ist bewiesen.

Bemerkung. Wie man leicht sieht, ist $X \bar{\wedge} S^0 = C X \vee \tilde{X} \equiv \tilde{X}$ ($S^0 = 0$ -Sphäre). Andererseits gilt $X \wedge S^0 = X$. Für die Aussage:

$$X \bar{\wedge} Y \equiv X \wedge Y \text{ für alle } Y$$

ist es also auch notwendig, daß $\tilde{X} \equiv X$ ist, d.h. daß X einen nicht ausgearteten Grundpunkt hat.

5.7. Zum Beweis von Hilfssatz 15 benötigen wir:

Hilfssatz 16. Seien X, Y irgend zwei topologische Räume, A eine kompakte Teilmenge von X und $p': X \rightarrow X/A$ die natürliche Projektion. Dann ist $p = p' \times 1_Y: X \times Y \rightarrow X/A \times Y$ eine Identifizierung. (Vgl. auch die Bemerkung am Schluß von 1.1.)

Beweis. p ist offenbar stetig, d.h.: Ist $B \subset X/A \times Y$ offen, so auch $p^{-1}(B)$. Es muß noch die Umkehrung gezeigt werden: Wir setzen also $p^{-1}(B)$ als offen voraus und wollen zeigen, daß B für jedes $(\bar{x}, y) \in B$ eine Umgebung ist.

1. Fall: $\bar{x} = p'(A)$: Dann ist $A \setminus y \subset p^{-1}(B)$. Wegen der Kompaktheit von A gibt es offene Mengen $U_0 \subset X$, $V_0 \subset Y$, so daß $A \times y \subset U_0 \times V_0 \subset p^{-1}(B)$. $p'(U_0) \times V_0 \subset B$ ist dann eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$ und daher auch B selbst.

2. Fall: $\bar{x} = p'(x) \neq p'(A)$. Trivialerweise gibt es offene Mengen $U \subset X$, $V \subset Y$ mit $(x, y) \in U \times V \subset p^{-1}(B)$. $p'(U) \times V \subset B$ ist dann eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$, falls $U \cap A = \emptyset$ ist; anderenfalls folgt $(p'(A), y) \subset B$, man kann das zum 1. Fall Gesagte benutzen und erhält mit $p'(U \cup U_0) \times (V \cap V_0)$ eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$, die in B enthalten ist. In jedem Falle folgt, daß B eine Umgebung von $(\bar{x}, y)$ ist.

Beweis von Hilfssatz 15. $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ entstehen aus $X + I$ bzw. $Y + I$ durch Identifizieren von $x_0 \in X$ mit $0 \in I$ bzw. $y_0 \in Y$ mit $0 \in I$. Die natürlichen Abbildungen

$$(X + I) \setminus (Y + I) \rightarrow \tilde{X} \times (Y + I) \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{Y}$$

sind nach Hilfssatz 16 ebenfalls Identifizierungen, und schließlich folgt aus 1.1 Hilfssatz 1, daß auch

$$(36) \quad (X + I) \times (Y + I) \times I \rightarrow \tilde{X} \times \tilde{Y} \times I$$

eine Identifizierung ist. Es genügt daher, die gesuchte Retraktion ϱ auf $X \times Y \times I$, $X \times I \times I$, $I \times Y \times I$ und I^3 getrennt zu definieren, wenn man nur dafür sorgt, daß sie mit der Identifizierung (36) verträglich ist.

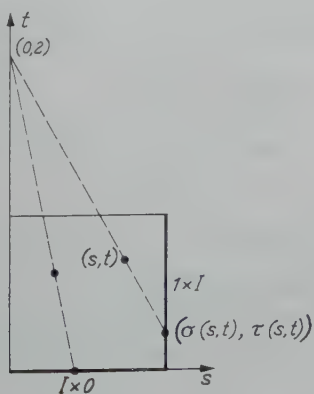


Fig. 10. Stark ausgezogen: $I \times 0 \cup 1 \times I$

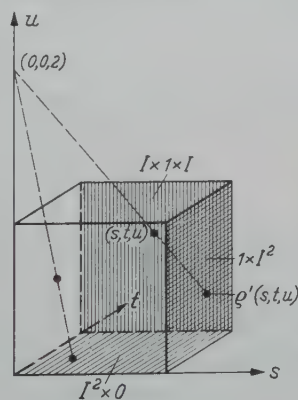


Fig. 11. Schraffiert: $I^2 \times 0 \cup I \times 1 \times I \cup 1 \times I^2$

Seien $\sigma, \tau: I^2 \rightarrow I$ so erklärt, daß die Zuordnung

$$(s, t) \rightarrow (\sigma(s, t), \tau(s, t)), \quad s, t \in I$$

die Zentralprojektion von I^2 auf $I \times 0 \cup 1 \times I$ vom Punkt $(0, 2)$ aus liefert (Fig. 10).

$$\varrho': I^3 \rightarrow I^2 \times 0 \cup I \times 1 \times I \cup 1 \times I^2$$

sei die Zentralprojektion vom Punkt $(0, 0, 2)$ aus (Fig. 11). Eine Retraktion ϱ der gesuchten Art erhält man nun durch die Festsetzung

$$\varrho(x, y, t) = \begin{cases} (x, y, 0), & x \in X, y \in Y, t \in I \\ (x, \sigma(y, t), \tau(y, t)), & x \in X, y \in I \\ (\sigma(x, t), y, \tau(x, t)), & x \in I, y \in Y \\ \varrho'(x, y, t), & x \in I, y \in I. \end{cases}$$

5.8. Das $\wedge$ -Produkt ist im allgemeinen nicht assoziativ. Bezeichnet z.B. Q den Raum der rationalen und N den der natürlichen Zahlen, so kann man $(Q \wedge Q) \wedge N$ und $Q \wedge (Q \wedge N)$ zwar als dieselbe Menge auffassen, aber die Topologien sind verschieden (vgl. BOURBAKI [2] § 9, Exerc. 11, wo ein sehr ähnliches Beispiel genannt ist). Es gilt jedoch:

Satz 17. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist auch der Grundpunkt von $X \wedge Y$ nicht ausgeartet.*

Satz 18. *Innerhalb der Klasse der Räume mit nicht ausgeartetem Grundpunkt ist das $\wedge$ -Produkt bis auf Homotopieäquivalenz assoziativ.*

Beweis von Satz 17. Die Retraktion ϱ von 5.6 Hilfssatz 15 induziert eine Retraktion

$$(37) \quad \bar{\varrho}: (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \times I \rightarrow (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \vee I.$$

[Der Übergang von ϱ zu $\bar{\varrho}$ erfolgt durch die Identifizierung $\tilde{X} \times \tilde{Y} \times I \rightarrow (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \times I$, vgl. 1.1 Hilfssatz 1.] Definiert man

$$h_i: (\tilde{X} \wedge \tilde{Y})^\sim \rightarrow (\tilde{X} \wedge \tilde{Y})^\sim$$

$[(\tilde{X} \wedge \tilde{Y})^\sim = (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \vee I$ mit $1 \in I$ als Grundpunkt] durch

$$\begin{aligned} h_i(x, y) &= \bar{\varrho}(x, y, t), & x \in \tilde{X}, y \in \tilde{Y}, t \in I \\ h_i(s) &= 1 - (1 - s)(1 - t), & s \in I \subset (\tilde{X} \wedge \tilde{Y})^\sim, \end{aligned}$$

so ist h_i eine Homotopie der Identität h_0 , bei der $I \subset (\tilde{X} \wedge \tilde{Y})^\sim$ in sich auf $1 \in I$ zusammengezogen wird. Daher ist der Grundpunkt von $\tilde{X} \wedge \tilde{Y}$ nicht ausgeartet [vgl. 5.4 c)]. Aus der Voraussetzung $\tilde{X} \equiv X$, $\tilde{Y} \equiv Y$ [vgl. 5.4 a)] folgt nach 5.3 C) $\tilde{X} \wedge \tilde{Y} \equiv X \wedge Y$. Nach 5.5 B) ist also auch der Grundpunkt von $X \wedge Y$ nicht ausgeartet.

Beweis von Satz 18. Wir haben zu zeigen: $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv X \wedge (Y \wedge Z)$ wenn X, Y, Z nicht ausgeartete Grundpunkte haben, d.h. wenn $X \equiv \tilde{X}$: $Y \equiv \tilde{Y}$, $Z \equiv \tilde{Z}$ ist [vgl. 5.4 a)]. Aus dieser Voraussetzung folgt nach 5.3 C): $(X \wedge Y) \wedge Z \equiv (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \wedge \tilde{Z}$. Sei M die Menge der Punkte von $(\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \wedge \tilde{Z}$ und $\mathfrak{A}$ die Topologie. Aus der natürlichen Projektion $\tilde{X} \times \tilde{Y} \times \tilde{Z} \rightarrow M$ erhält man auf M andererseits die Identifizierungstopologie $\bar{\mathfrak{A}}$.

Unter Benutzung der obigen Retraktion $\bar{\varrho}$ [vgl. (37)] und der natürlichen Projektion $\bar{p}: (\tilde{X} \wedge \tilde{Y}) \vee I \rightarrow \tilde{X} \wedge \tilde{Y}$ (Identifizieren von I zu einem Punkt) defi-

nieren wir $h_i: M \rightarrow M$ durch

$$h_i(x, y, z) = (\bar{p}\bar{q}(x, y, t), z), \quad x \in \check{X}, y \in \check{Y}, z \in \check{Z}, t \in I.$$

Nach 5.3 B) ist h_i eine Homotopie, wenn man M mit der Topologie $\mathfrak{T}$ versieht. Nach 1.1 Hilfssatz 1 ist h_i auch eine Homotopie, wenn man auf M die Topologie $\bar{\mathfrak{T}}$ nimmt, denn h_i wird durch eine Homotopie von $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z}$ in sich induziert [gegeben durch $(x, y, z) \rightarrow (\bar{p}\bar{q}(x, y, t), z)$, wobei $\bar{q}$ die Retraktion von 5.6 Hilfssatz 15 und $\bar{p}: \check{X} \times \check{Y} \times I \rightarrow \check{X} \times \check{Y}$ die natürliche Projektion ist].

Die Identität $(M, \bar{\mathfrak{T}}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$ ist stetig, weil ihre Zusammensetzung mit der Identifizierung $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z} \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$ stetig ist. Schließlich werden wir zeigen:

(38) $h_1: (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$ ist stetig.

Daraus folgt leicht die Behauptung des Satzes: Setzt man $h_1: (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$ mit der Identität $(M, \bar{\mathfrak{T}}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$ zusammen, so ergibt sich je nach der Reihenfolge $h_1: (M, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \bar{\mathfrak{T}})$ oder $h_1: (M, \bar{\mathfrak{T}}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$. Beide Abbildungen sind vermöge h_i zur Identität h_0 homotop, also ist $(M, \mathfrak{T}) = (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z} \equiv (X \wedge Y) \wedge Z$ mit $(M, \bar{\mathfrak{T}})$ homotopieäquivalent. Da $(M, \bar{\mathfrak{T}})$ in X, Y, Z symmetrisch ist, folgt ebenso $X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (M, \bar{\mathfrak{T}})$ und damit die behauptete Assoziativität.

Es ist also nur noch (38) zu beweisen. Wir definieren dazu zwei Teilmengen A_1, A_2 von $\check{X} \wedge \check{Y}$ durch (Fig. 12)

$$A_1 = \{(x, y) \mid x \in I \subset \check{X}, x \geq \tfrac{1}{2} \text{ oder } y \in I \subset \check{Y}, y \geq \tfrac{1}{2}\}$$

$$A_2 = \{(x, y) \mid (x \notin I \text{ oder } x \leq \tfrac{1}{2}) \text{ und } (y \notin I \text{ oder } y \leq \tfrac{1}{2})\}.$$

Diese Mengen sind abgeschlossen, weil ihre Urbilder in $\check{X} \times \check{Y}$ es sind. Die Projektion $(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z} \rightarrow (\check{X} \wedge \check{Y}) \wedge \check{Z} = (M, \mathfrak{T})$ ist eine abgeschlossene Identifizierung (vgl. BOURBAKI [2] § 9, No. 7), weil lediglich die abgeschlossene Teilmenge $(\check{X} \wedge \check{Y}) \vee \check{Z}$ zu einem Punkt identifiziert wird. Insbesondere ist das Bild M_i von $A_i \times \check{Z}$ in M ($i=1, 2$) bezüglich der Topologie $\mathfrak{T}$ abgeschlossen. Da M_1, M_2 ganz M überdecken, genügt es zu zeigen, daß $h_1|_{M_i}$ stetig ist. Für $i=1$ ist das trivial, weil $h_1(M_1)$ nur aus dem Grundpunkt besteht (vgl. die Definition von h_i). Für $i=2$ bemerken wir zunächst, daß M_2 als Menge mit $(A_2 \times \check{Z}) / (A_2 \times \check{z}_0)$ übereinstimmt ($\check{z}_0 = 1 \in I \subset \check{Z}$ ist der Grundpunkt von $\check{Z}$). Aber auch die Topologie von $(A_2 \times \check{Z}) / (A_2 \times \check{z}_0)$ stimmt sowohl mit der durch $\mathfrak{T}$ als auch mit der durch $\bar{\mathfrak{T}}$ in M_2 induzierten überein. Das folgt aus [2] § 9, Prop. 8, weil $A_2 \times \check{Z}$ eine abgeschlossene Teilmenge sowohl von $(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z}$

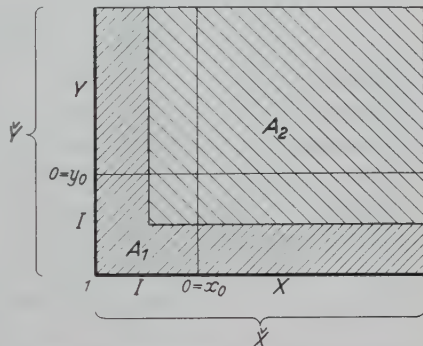


Fig. 12. Stark ausgezogene Linien sind als ein einziger Punkt anzusehen

als auch von $\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z}$ ist (A_2 bleibt von der Identifizierung $\check{X} \times \check{Y} \rightarrow \check{X} \wedge \check{Y}$ unberührt) und weil

$$(\check{X} \wedge \check{Y}) \times \check{Z} \rightarrow (M, \mathfrak{T})$$

$$\check{X} \times \check{Y} \times \check{Z} \rightarrow (M, \mathfrak{T})$$

abgeschlossene Identifizierungen sind. $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ induzieren also in M_2 dieselbe Topologie. Weil $h_1|_{M_2}: (M_2, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$ stetig ist, wie wir oben sahen, ist es auch $h_1|_{M_2}: (M_2, \mathfrak{T}) \rightarrow (M, \mathfrak{T})$.

5.9. Wir sind nun in der Lage, die Formel 5.6 (34) für die Einhängung eines Produkts von zwei Räumen auf mehrere Faktoren zu verallgemeinern. Dazu zunächst:

Hilfssatz 17. *Haben X und Y nicht ausgeartete Grundpunkte x_0 bzw. y_0 , so ist auch der Grundpunkt (x_0, y_0) von $X \times Y$ nicht ausgeartet.*

[Beweis. Nach Voraussetzung [vgl. 5.4 d)] gibt es Umgebungen U, V von x_0 bzw. y_0 , die sich in X bzw. Y zusammenziehen lassen, und stetige Funktionen $u: X \rightarrow I, v: Y \rightarrow I$ mit

$$u(x_0) = 1, \quad u(x) = 0 \quad \text{für } x \notin U$$

$$v(y_0) = 1, \quad v(y) = 0 \quad \text{für } y \notin V.$$

Die Umgebung $W = U \times V$ von (x_0, y_0) und die durch $w(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ definierte Funktion $w: X \times Y \rightarrow I$ leisten dann das Entsprechende für $X \times Y$.

Seien nun $X_1, X_2, \dots, X_n$ topologische Räume mit nicht ausgearteten Grundpunkten. [Interessiert nur der freie Homotopietyp, nicht aber der Grundpunkt, so ist das wegen 5.5 D) keine Einschränkung.] Unter Beachtung von $SX = S^1 \wedge X$ [vgl. 5.3 (33)] läßt sich 5.6 (34) in der Form

$$(39) \quad S^1 \wedge (X \times Y) \equiv (S^1 \wedge X) \vee (S^1 \wedge Y) \vee (S^1 \wedge X \wedge Y)$$

schreiben. Wegen 5.8 Satz 18 ist es nicht nötig im letzten Glied weitere Klammern zu setzen. Nach Hilfssatz 17 ist (39) auf $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}$, $Y = X_n$ anwendbar und ergibt

$$\begin{aligned} S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_n) \\ \equiv (S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_{n-1})) \vee (S^1 \wedge X_n) \vee (S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \wedge X_n). \end{aligned}$$

Das ist eine Rekursionsformel zur Berechnung von $S^1 \wedge (X_1 \times \dots \times X_n)$, aus der man leicht schließt – wir schreiben wieder SX für $S^1 \wedge X$:

Satz 19. *Haben die Räume $X_1, X_2, \dots, X_n$ nicht ausgeartete Grundpunkte, so ist*

$$(40) \quad S(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n) \equiv \bigvee_{N} S \bigwedge_{i \in N} X_i,$$

worin N alle nichtleeren Teilmengen der Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft.

Für Sphären S^p, S^q ist $S^p \wedge S^q = S^{p+q}$. [$S^p \vee S^q$ besitzt nämlich eine Zellenzerlegung, bei der das Komplement von $S^p \vee S^q$ eine einzige $(p+q)$ -Zelle ist, also besteht $S^p \wedge S^q = (S^p \setminus S^q) \cdot (S^p \vee S^q)$ aus einer $(p+q)$ -Zelle und einer 0-Zelle.] Man erhält daher aus Satz 19:

Satz 20⁶⁾. Haben die Sphären S_i die Dimensionen k_i ($0 \leq k_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, n$), so ist

$$S(S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n) \equiv \bigvee_N S_N,$$

wobei N alle nicht leeren Teilmengen der Menge aller ganzen Zahlen von 1 bis n durchläuft und S_N eine Sphäre der Dimension $1 + \sum_{i \in N} k_i$ ist.

Bemerkung. Sind $X_1, X_2, \dots, X_n$ abzählbare CW-Komplexe, so vereinfacht sich der Beweis von (40) erheblich. Man kommt ohne die Abschnitte 5.4 bis 5.8 aus: $\wedge$ -Produkte von abzählbaren CW-Komplexen sind nämlich wieder abzählbare CW-Komplexe (vgl. den Schluß von 5.3) und das $\wedge$ -Produkt ist für sie sogar streng assoziativ, weil (wie aus MILNOR [11] 2.9 leicht folgt) die natürliche Abbildung $X \times Y \times Z \rightarrow (X \wedge Y) \wedge Z$ eine Identifizierung ist. Außerdem wird nur noch die Formel (34) bzw. (39) gebraucht, die man in diesem Fall aus 5.1 Satz 15 und der Schlußbemerkung in 5.3 entnehmen kann.

5.10. Die $\wedge$ -Multiplikation mit einem festen Raum Z hat die bemerkenswerte Eigenschaft, eine Abbildungsfolge im Sinne von 1.11 (bis auf Homotopieäquivalenz) wieder in eine Abbildungsfolge überzuführen. Es gilt nämlich:

Hilfssatz 18. Für jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ und jeden Raum Z gibt es Homotopieäquivalenzen

$$\varphi: C_f \wedge Z \rightarrow C_{f \wedge 1} \quad \text{und} \quad \psi: C_{f \wedge 1} \rightarrow C_f \wedge Z,$$

so daß die Diagramme

$$(41a) \quad \begin{array}{ccc} & & C_f \wedge Z \\ & \nearrow P(f \wedge 1) & \\ Y \wedge Z & & \\ & \searrow P(f \wedge 1) & \\ & & C_{f \wedge 1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \varphi \\ \end{array}$$

$$(41b) \quad \begin{array}{ccc} & & C_f \wedge Z \\ & \nearrow P(f \wedge 1) & \\ Y \wedge Z & & \\ & \searrow P(f \wedge 1) & \\ & & C_{f \wedge 1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \psi \\ \end{array}$$

kommutativ sind. 1 bezeichnet dabei die Identität $1 = 1_Z: Z \rightarrow Z$.

Satz 21. Die Abbildungsfolge $\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z)$ (vgl. 1.11) ist mit der Folge

$$\mathfrak{A}(f \wedge 1_Z): X \wedge Z \xrightarrow{f \wedge 1} Y \wedge Z \xrightarrow{P(f \wedge 1)} C_f \wedge Z \xrightarrow{Q(f \wedge 1)} SX \wedge Z \xrightarrow{S(f \wedge 1)} SY \wedge Z \rightarrow \dots$$

homotopieäquivalent.

Hilfssatz 18 wird in 5.12 bewiesen.

⁶⁾ Dieser Satz wurde mit anderen Methoden zuerst von K. A. HARDIE bewiesen und mir durch P. HILTON brieflich mitgeteilt.

Beweis von Satz 21. Wir ergänzen das Diagramm (41a) zu

$$(42) \quad \begin{array}{ccccc} & & & P^2 f \wedge 1 & \nearrow \\ & & & & C_{Pf} \wedge Z \\ & & & & \downarrow \varphi' \\ & & P f \wedge 1 & \nearrow & \\ & & C_f \wedge Z & \xrightarrow{P(P f \wedge 1)} & C_{P f \wedge 1} \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \chi \\ Y \wedge Z & \xrightarrow{P(f \wedge 1)} & C_{f \wedge 1} & \xrightarrow{P^2(f \wedge 1)} & C_{P(f \wedge 1)}. \end{array}$$

Darin ist φ' eine zu φ analoge Homotopieäquivalenz mit Pf an Stelle von f . $\chi = C(1_{Y \wedge Z}, \varphi)$ wird durch die Transformation $(1_{Y \wedge Z}, \varphi)$ von $Pf \wedge 1$ in $P(f \wedge 1)$ induziert (vgl. 2.2), ist also auch eine Homotopieäquivalenz (2.4 Hilfssatz 7). Man entnimmt daher aus (42), daß nicht nur

$$[f \wedge 1, P f \wedge 1] \equiv [f \wedge 1, P(f \wedge 1)]$$

ist, wie schon aus (41a) hervorgeht, sondern sogar

$$[f \wedge 1, P f \wedge 1, P^2 f \wedge 1] \equiv [f \wedge 1, P(f \wedge 1), P^2(f \wedge 1)]$$

(vgl. 1.2 zur Definition der Homotopieäquivalenz zwischen Folgen von Abbildungen). Analog schließt man weiter und erhält

$$(43) \quad \mathfrak{P} f \wedge 1_Z \equiv \mathfrak{P}(f \wedge 1_Z)$$

(zur Definition von $\mathfrak{P}f$ vgl. 1.11). Nach 1.11 Satz 5 ist $\mathfrak{P}f \equiv \mathfrak{U}f$ und $\mathfrak{P}(f \wedge 1_Z) \equiv \mathfrak{U}(f \wedge 1_Z)$. Aus ersterem gewinnt man $\mathfrak{P}f \wedge 1_Z \equiv \mathfrak{U}f \wedge 1_Z$ durch $\wedge$ -Multiplikation aller vorkommenden Abbildungen mit 1_Z . Also folgt aus (43)

$$\mathfrak{U}f \wedge 1_Z \equiv \mathfrak{U}(f \wedge 1_Z)$$

und damit Satz 21.

Bemerkungen. 1. Nach Satz 21 ist insbesondere $S(X \wedge Z) \equiv S X \wedge Z$, d.h. [vgl. 5.3 (33)]

$$S^1 \wedge (X \wedge Z) \equiv (S^1 \wedge X) \wedge Z$$

ohne jede Voraussetzung über X und Z (vgl. im Gegensatz dazu 5.8). Entscheidend für dieses besondere Verhalten, das mit Hilfssatz 16 zusammenhängt, ist die Kompaktheit von S^1 .

2. Mit $\bar{\wedge}$ an Stelle von $\wedge$ wäre Satz 21 im allgemeinen falsch. Insbesondere ist nicht immer $S(X \bar{\wedge} Z) \equiv S X \bar{\wedge} Z$. Gegenbeispiel: $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\} \cup \{0\}$ mit 0 als Grundpunkt, $Z = S^0$.

5.11. Induziert $f: X \rightarrow Y$ Monomorphismen $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$ für jeden Bildraum V , so ist wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{U}f$ (1.12 Satz 6) $(Pf)^* = 0$ für alle V und daher $Pf \simeq 0$ [vgl. 3.1 A]. Dann ist auch $Pf \wedge 1_Z \simeq 0 \wedge 1_Z = 0$ für alle Z . (0 bezeichnet darin die konstante Abbildung, die den ganzen Urbildraum in den Grundpunkt des Bildraumes überführt.) Wegen $Pf \wedge 1_Z \simeq P(f \wedge 1_Z)$ (5.10 Satz 21) folgt $P(f \wedge 1_Z) \simeq 0$. Also ist $(P(f \wedge 1_Z))^* = 0$, und mit Hilfe der Exaktheit von $\mathfrak{U}(f \wedge 1_Z)$ schließt man auf die Monomorphie von $(f \wedge 1_Z)^*$.

Etwas allgemeiner betrachten wir $f \wedge f': X \wedge X' \rightarrow Y \wedge Y'$ (mit $f': X' \rightarrow Y'$). Wegen $f \wedge f' = (f \wedge 1_{Y'}) \circ (1_X \wedge f')$ erhält man durch zweimalige Anwendung dieser Schlußweise:

Satz 22. *Induzieren $f: X \rightarrow Y$ und $f': X' \rightarrow Y'$ Monomorphismen der Homotopiemengen $f^*: \pi(Y, V) \rightarrow \pi(X, V)$, $f'^*: \pi(Y', V) \rightarrow \pi(X', V)$ (zur Definition s. 1.3) für jeden Bildraum V , so ist auch $(f \wedge f')^*$ monomorph.*

Eine Anwendung dieses Satzes in Verbindung mit 5.1 Satz 14 werden wir im zweiten Teil der Arbeit angeben (vgl. [12] 6.4 Satz 4).

5.12. Beweis von Hilfssatz 18. Der Grundgedanke des Beweises ist ähnlich wie bei 5.8 Satz 18.

Wie in 3.6 sei $\tilde{C}X = (X \times I)/(X \times 0)$ und $\tilde{C}_f$ entstehe aus $\tilde{C}X + Y$ durch die Identifizierungen

$$\tilde{C}X \ni (x, 1) = f(x) \in Y \quad \text{für alle } x \in X.$$

Dann ist offenbar (vgl. 1.4)

$$(44) \quad C_f = \tilde{C}_f / \{(x_0, s) \mid s \in I\}.$$

Sei M die Menge der Punkte von $\tilde{C}_{f \wedge 1}$ ($1 = 1_Z: Z \rightarrow Z$) und $\mathfrak{T}_2$ die Topologie. M kann man auch aus $\tilde{C}_f \times Z$ durch die Identifizierungen

$$\begin{aligned} (x_0, z, s) &= (x, z_0, s)^?) & \text{für alle } x \in X, z \in Z, s \in I \\ (y_0, z) &= (y, z_0) & \text{für alle } y \in Y, z \in Z \end{aligned}$$

erhalten (Fig. 13). $\mathfrak{T}_1$ sei die Identifizierungstopologie. Mit der Abkürzung

$$I_0 = \{(x_0, z_0, s) \mid s \in I\} \subset M$$

$$(45) \quad (M, \mathfrak{T}_1)/I_0 = C_f \wedge Z,$$

$$(46) \quad (M, \mathfrak{T}_2)/I_0 = C_{f \wedge 1}.$$

(46) geht aus (44) hervor, wenn man f durch $f \wedge 1$ ersetzt. Beweis von (45) Mit der natürlichen Projektion $p: \tilde{C}_f \rightarrow C_f$ [vgl. (44)] ist auch $p \times 1_Z: \tilde{C}_f \times Z \rightarrow C_f \times Z$ eine Identifizierung, weil bei p lediglich eine kompakte Teilmenge von $\tilde{C}_f$ zu einem Punkt identifiziert wird (5.7 Hilfssatz 16). $C_f \wedge Z$ trägt daher die Identifizierungstopologie bezüglich

$$\tilde{C}_f \times Z \xrightarrow{p \times 1} C_f \times Z \rightarrow C_f \wedge Z.$$

^{?)} Die Punkte von $\tilde{C}_f \times Z$ müßten eigentlich mit (x, s, z) bzw. (y, z) ($x \in X, y \in Y, z \in Z, s \in I$) bezeichnet werden. Um die Übereinstimmung mit M zu erreichen, haben wir hier (x, s, z) durch (x, z, s) ersetzt.

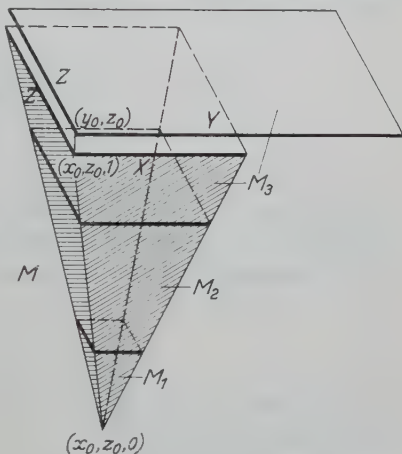


Fig. 13. Jede stark ausgezogene Linie ist als ein einziger Punkt anzusehen. Die schraffierten Teile stehen für die „vertikale“ Strecke I_0 .

Hierbei werden im Endglied dieselben Punkte gleichgesetzt wie bei

$$\tilde{C}_f \times Z \rightarrow (M, \mathfrak{T}_1) \rightarrow (M, \mathfrak{T}_1)/I_0$$

(natürliche Projektionen). Da es sich wieder um Identifizierungen handelt, folgt (45).

Wir betrachten nun folgende drei Teilmengen von M (vgl. Fig. 13):

$$M_1 = \{(x, z, s) \mid s \leq \tfrac{1}{4}\}$$

$$M_2 = \{(x, z, s) \mid \tfrac{1}{4} \leq s \leq \tfrac{3}{4}\}$$

$$M_3 = \{(x, z, s) \mid s \geq \tfrac{3}{4}\} \cup \{(y, z)\}$$

($x \in X, y \in Y, z \in Z, s \in I$). Sie sind in beiden Topologien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ abgeschlossen. $\eta_t: I \rightarrow I$ ($t \in I$) sei eine Homotopie der Identität η_0 von I , die das Teilintervall $[0, \frac{1}{4}] < I$ auf 0 und $[\frac{3}{4}, 1] < I$ auf 1 (unter Festhaltung von 0 und 1) zusammenzieht. Definieren wir $h_t: M \rightarrow M$ durch

$$(47) \quad \begin{cases} h_t(x, z, s) = (x, z, \eta_t(s)) \\ h_t(y, z) = (y, z), \end{cases}$$

so zieht h_t (wenn t von 0 nach 1 läuft) M_1 auf den Punkt $(x_0, z_0, 0)$ zusammen und M_3 auf $M'_3 = \{(y, z)\}$.

1.1 Hilfssatz 1 liefert: h_t ist eine Homotopie von $(M, \mathfrak{T}_i)$ in sich für $i = 1, 2$. Wir werden ferner zeigen:

(48) $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ induzieren sowohl in M_2 als auch in M'_3 dieselbe Topologie.

Daraus folgt, daß h_1 auch als Abbildung von $(M, \mathfrak{T}_1)$ in $(M, \mathfrak{T}_2)$ und von $(M, \mathfrak{T}_2)$ in $(M, \mathfrak{T}_1)$ stetig ist; denn diese Abbildungen sind auf den drei abgeschlossenen Teilmengen M_1, M_2, M_3 , die M überdecken stetig: $h_1(M_1)$ ist ein einziger Punkt, auf M_2 sind die Topologien $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ gleich, und M_3 wird durch h_1 in M'_3 abgebildet, wo $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ ebenfalls gleich sind.

Da h_1 die Teilmenge I_0 in sich abbildet, induziert h_1 stetige Abbildungen

$$\varphi: C_f \wedge Z \rightarrow C_{f \wedge 1}$$

$$\psi: C_{f \wedge 1} \rightarrow C_f \wedge Z$$

[vgl. (45), (46)]. $\psi \circ \varphi$ und $\varphi \circ \psi$ werden durch $h_1 \circ h_1: (M, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (M, \mathfrak{T}_i)$ mit $i = 1$ bzw. 2 induziert. Vermöge $h_t \circ h_t: (M, \mathfrak{T}_i) \rightarrow (M, \mathfrak{T}_i)$ ist $h_1 \circ h_1 \simeq h_0 \circ h_0 = 1_M$ (bezüglich $\mathfrak{T}_i$). Wegen $h_t(I_0) < I_0$ ist $h_t \circ h_t$ mit dem Identifizieren von I_0 zu einem Punkt verträglich und liefert (vgl. 1.1 Hilfssatz 1)

$$\psi \circ \varphi \simeq 1, \quad \varphi \circ \psi \simeq 1.$$

Nach Konstruktion von φ und ψ [vgl. (47)] sind die Diagramme (41a) und (41b) von Hilfssatz 18 kommutativ.

Es ist also nur noch (48) zu beweisen: Wie man (unter Benutzung der Stetigkeit von f) leicht bestätigt, wird Y bei der Identifizierung $\tilde{C}X + Y \rightarrow \tilde{C}$, topologisch auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\tilde{C}_f$ abgebildet, die wir mit

Y identifizieren. Auf $f \wedge 1$ angewandt, besagt das:

$$(M'_3, \mathfrak{T}_2) = Y \wedge Z.$$

Andererseits ist $Y \times Z$ ein abgeschlossener Teilraum von $\tilde{C}_f \times Z$ (mit der induzierten Topologie), der bezüglich der Identifizierung $\tilde{C}_f \times Z \rightarrow (M, \mathfrak{T}_1)$ saturiert⁸⁾ ist. Daraus folgt nach BOURBAKI [2] § 9, No. 5, Corr. 1, daß $(M'_3, \mathfrak{T}_1)$ durch Identifizieren aus $Y \times Z$ entsteht, d.h.

$$(M'_3, \mathfrak{T}_1) = Y \wedge Z.$$

Der Beweis für M_2 verläuft analog: Mit der Abkürzung $I' = \{s \mid s \in I, \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{3}{4}\}$ ist offenbar

$$(M_2, \mathfrak{T}_2) = (X \wedge Z) \setminus I'.$$

Andererseits ist $X \times Z \times I'$ ein abgeschlossener Teilraum von $\tilde{C}_f \times Z^9$, der bezüglich der Identifizierung $\tilde{C}_f \times Z \rightarrow (M, \mathfrak{T}_1)$ saturiert ist, und daraus folgt, daß $(M_2, \mathfrak{T}_1)$ durch Identifizieren aus $X \times Z \times I'$ entsteht, d.h. (unter Beachtung von 1.1 Hilfsatz 1)

$$(M_2, \mathfrak{T}_1) = (X \wedge Z) \times I'.$$

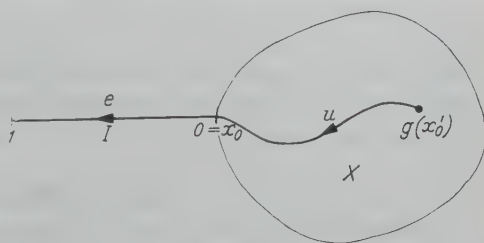


Fig. 14

5.13. Anhang. Beweis von 5.5 E). Seien $f: X \rightarrow X'$, $g: X' \rightarrow X$ frei homotopieinvers zueinander. Wir werden f zu

einer gebundenen Homotopieäquivalenz $\check{f}: \check{X} \rightarrow \check{X}'$ fortsetzen. Wegen der Voraussetzung $X \equiv \check{X}$, $X' \equiv \check{X}'$ [vgl. 5.4 a)] genügt das zum Beweis von 5.5 E).

Seien $u: I \rightarrow X$, $v: I \rightarrow X'$ Wege, die $g(x'_0)$ mit x_0 bzw. $f(x_0)$ mit x'_0 verbinden (x_0, x'_0 = Grundpunkte von X bzw. X' , vgl. Fig. 14, die den ersten der beiden Fälle veranschaulicht). $e: I \rightarrow I$ sei die Identität. Wie üblich wird die Zusammensetzung $w \cdot w'$ zweier Wege w, w' [falls $w(1) = w'(0)$] durch

$$(w \cdot w')(s) = \begin{cases} w(2s), & s \leq \frac{1}{2} \\ w'(2s-1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (s \in I)$$

und der inverse Weg w^{-1} durch

$$w^{-1}(s) = w(1-s), \quad s \in I$$

definiert. Fortsetzungen $\check{f}: \check{X} \rightarrow \check{X}'$, $\check{g}: \check{X}' \rightarrow \check{X}$ von f bzw. g , die Grundpunkte in Grundpunkte abbilden, erhält man nun, wenn man

$$\check{f}|I = v \cdot e, \quad \check{g}|I = u \cdot e$$

setzt (Fig. 14).

⁸⁾ Eine Menge $A \subset X$ heißt *saturiert* bezüglich der Identifizierung $p: X \rightarrow \check{X}$, wenn $p^{-1}(p(A)) = A$ ist.

⁹⁾ Statt $X \times Z \times I'$ müßte es eigentlich $X \times I' \times Z$ heißen, vgl. aber Fußnote ⁷⁾, S. 341.

Nach Voraussetzung bestehen die freien Homotopien $g \circ f \simeq 1_X$ und $f \circ g \simeq 1_{X'}$. Die Grundpunkte x_0 bzw. x'_0 mögen bei diesen Homotopien die Wege w bzw. w' durchlaufen. Kann man u und v so wählen, daß der Weg

$$\check{g} \circ \check{f} | I = (\check{g} \circ v) \cdot (\check{g} \circ e) = (g \circ v) \cdot (u \cdot e)$$

mit $w \cdot e$, d.h. $(g \circ v) \cdot u$ mit w homotop ist (Fig. 15), so läßt sich die freie Homotopie $g \circ f \simeq 1_X$ zu einer gebundenen Homotopie $\check{g} \circ \check{f} \simeq 1_{\check{X}}$ fortsetzen.

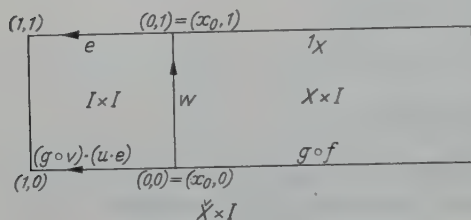


Fig. 15

Analog erhält man $\check{f} \circ \check{g} \simeq 1_{\check{X}'}$, wenn $(f \circ u) \cdot v \simeq w'$ ist.

Wir wählen nun für u irgendeinen Weg von $g(x'_0)$ nach x_0 . Dann setzen wir $v = (f \circ u)^{-1} \cdot w'$, wodurch $(f \circ u) \cdot v \simeq w'$ und daher $\check{f} \circ \check{g} \simeq 1_{\check{X}'}$ erfüllt wird. Dann setzen wir $u' = (g \circ v)^{-1} \cdot w$ und erhalten $(g \circ v) \cdot u' \simeq w$, also $\check{g}' \circ \check{f} \simeq 1_{\check{X}}$,

wenn $\check{g}'$ die zu u' gehörende Fortsetzung von g bezeichnet. $\check{f}$ besitzt demnach sowohl ein Rechts- als auch ein Links-Homotopieinverses und ist daher eine Homotopieäquivalenz [vgl. 2.5 C)].

Literatur

- [1] BARRATT, M. G.: Track groups I. Proc. London Math. Soc. (3) **5**, 71–106 (1955). — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I, Structures topologiques, 2. Aufl. Paris 1951. — [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. X, Espaces fonctionnels. Paris 1949. — [4] EILENBERG, S.: On the relation between the fundamental group of a space and the higher homotopy groups. Fund. Math. **32**, 167–175 (1939). — [5] EILENBERG, S., and N. E. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton Univ. Press 1952. — [6] HILTON, P. J.: An introduction to homotopy theory. Cambridge Univ. Press 1953. — [7] HOPF, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Kugel auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637–665 (1931). — [8] FOX, R. H.: On homotopy type and deformation retracts. Ann. of Math. **44**, 40–50 (1943). — [9] JAMES, I. M.: Reduced product spaces. Ann. of Math. **62**, 170–197 (1955). — [10] JAMES, I. M.: On the suspension triad. Ann. of Math. **63**, 191–247 (1956). — [11] MILNOR, J.: Construction of universal bundles I. Ann. of Math. **63**, 272–284 (1956). — [12] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen II. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten. Erscheint demnächst in Math. Z. **69**, Schlußheft (1958). — [13] SEIFERT, H., u. W. THRELFAH: Lehrbuch der Topologie. Leipzig 1934. — [14] SERRE, J. P.: Sur la suspension de Freudenthal. C. R. Acad. Sci. Paris **234**, 1340–1342 (1952). — [15] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [16] WHITEHEAD, G. W.: On products in homotopy groups. Ann. of Math. **47**, 460–475 (1946). — [17] WHITEHEAD, G. W.: A generalization of the Hopf invariant. Ann. of Math. **51**, 192–237 (1950). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: On adding relations to homotopy groups. Ann. of Math. **42**, 409–428 (1941). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213–245 (1949). — [20] WHITEHEAD, J. H. C.: On certain theorems of G. W. WHITEHEAD. Ann. of Math. **58**, 418–428 (1953).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 4. September 1957)

Eine Distributivitätseigenschaft konjugierter Untergruppen

Von

HELMUT WIELANDT

OTTO GRÜN zum 70. Geburtstag am 26. Juni 1958 gewidmet

Herr GRÜN hat die folgende Vermutung ausgesprochen und in abgeschwächter Form bewiesen¹⁾: Wenn in der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ die Untergruppe $\mathfrak{H}$ mit ihrem Normalisator $N(\mathfrak{H})$ übereinstimmt und wenn alle Elemente von $\mathfrak{H}$, die auch in zu $\mathfrak{H}$ konjugierten Untergruppen liegen, in einem Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{H}$ enthalten sind, so gibt es in $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{H}\mathfrak{R} = \mathfrak{G}$. Kürzlich ist mit Hilfe der Frobeniusschen Theorie der Gruppencharaktere bestätigt worden, daß diese Vermutung ohne Einschränkung richtig ist²⁾. Daraus ergibt sich ein bemerkenswert voraussetzungsarmer Satz über Durchschnittsbildung $\cap$ und Erzeugnisbildung $\cup$ bei konjugierten Untergruppen:

Es seien $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \dots, \mathfrak{H}_n$ die sämtlichen Konjugierten einer Untergruppe von endlichem Index n in einer beliebigen Gruppe $\mathfrak{G}$ (so daß jede von ihnen $N(\mathfrak{H}_1) : \mathfrak{H}_1$ -mal auftritt). Dann ist

$$\mathfrak{H}_1 \cap \bigcup_{\beta \neq \gamma}^{1 \dots n} (\mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma) = \bigcup_{\gamma=2}^n (\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_\gamma).$$

Beweis. Der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ aller n Konjugierten ist normal und von endlichem Index in $\mathfrak{G}$; daher können wir durch Übergang zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{D}$ o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{G}$ endlich ist. Ferner können wir $\mathfrak{H}_1 = N(\mathfrak{H}_1)$ annehmen; denn sonst stimmt offenbar die linke Seite $\mathfrak{Q}$ wie die rechte Seite $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{H}_1$ überein. Nun erfüllen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{R}$ die Voraussetzungen des erwähnten Satzes. Es gibt also einen Normalteiler $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Dieser enthält alle Durchschnitte $G^{-1}(\mathfrak{H}_1 \cap \mathfrak{H}_\gamma)G$ ($\gamma \neq 1$, $G \in \mathfrak{G}$), also enthält er alle Durchschnitte $\mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma$ ($\beta \neq \gamma$) und damit auch deren Erzeugnis $\mathfrak{F}$. Nun folgt $\mathfrak{Q} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}$. Die Umkehrung $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{Q}$ ist trivial.

Die bewiesene Gleichung ergibt nach leichter Umformung eine merkwürdige Distributivitäts-Aussage für die n Konjugierten $\mathfrak{H}_\alpha$ einer Untergruppe vom Index n :

$$\mathfrak{H}_\alpha \cap \bigcup_{\beta \neq \gamma} (\mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma) = \bigcup_{\beta \neq \gamma} (\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta \cap \mathfrak{H}_\gamma).$$

¹⁾ GRÜN, O.: Beiträge zur Gruppentheorie II. J. reine angew. Math. **186**, 165—169 (1948).

²⁾ WIELANDT, H.: Über die Existenz von Normalteilern in endlichen Gruppen. Math. Nachr. **18**, 274—280 (1958).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. März 1958)

Convolution Operators which are not of Scalar Type

By

G. L. KRABBE

1. Introduction. This note is to be followed by an article which attempts to extend the scope of the Spectral Theorem beyond DUNFORD's class of scalar type operators. Additional motivation for such an extension is presented here. Let $G = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ and let T be a bounded operator on $l_p = L^p(G)$, $1 < p \neq 2$; consider the relation

$$(1) \quad T = \int \lambda \cdot E(d\lambda),$$

where E is a projector-valued, finitely additive set function. To DUNFORD is due the theory of spectral operators (see § 3 and [I]); T is said to be of "scalar type" if it is a spectral operator satisfying (1), where E is the resolution of the identity for T (see [I, p. 325]). To any "uniformly bounded transformation" (in the sense of LORCH [6, §]) corresponds a family $\{E_\lambda; \lambda\}$ of projectors; the question of the existence of a relation of type (1) for such operators T has not yet been settled [6, pp. 263—264].

Set $\alpha = \pm 1$, and let $\tau_\alpha x$ be the translate $\{x_{n+\alpha}\}_{n \in G}$ of the sequence $x = \{x_n\}_{n \in G}$. It will be shown that the operator $x \rightarrow \tau_\alpha x$ defined on l_p is not a scalar type operators, although it is a uniformly bounded transformation of the simplest kind. Furthermore, it turns out that the Hilbert-transformation H defined on l_p by the matrix

$$\left(\frac{1}{n-v} \right)_{(n,v) \in G \times G}$$

is not of scalar type either.

Nevertheless, both H and τ_α belong to a class of convolution operators T which satisfy (1)¹⁾; this will be established in the subsequent article (in preparation).

2. Preliminaries. If B is a bounded and measurable function on $S = [0, 1]$, then YB will denote the sequence $\{[YB]_n\}_{n \in G}$ defined by

$$[YB]_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n \vartheta} B(\vartheta) d\vartheta.$$

As usual, $\|a\|_p = (\sum |a_n|^p)^{1/p}$, $n \in G$. Let $\mathfrak{C}$ be the Banach algebra of all continuous functions defined on S , with the topology of the norm $B \rightarrow \|B\|_\infty = \sup \{|B(\vartheta)| : \vartheta \in S\}$. Let $\mathfrak{P}$ be the set of all polynomials defined on S .

¹⁾ Provided that (1) is interpreted in the weak topology.

2.1. LEMMA. Suppose $1 < u < 2$. There does not exist a number $k_u > 0$ such that

$$(2) \quad \|YB\|_u \leq k_u \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}.$$

PROOF. By way of contradiction, suppose that (2) holds. Then Y is a bounded linear mapping of $\mathfrak{P}$ into l_u . Since $\mathfrak{P}$ is dense in $\mathfrak{C}$, then Y admits a unique continuous extension F which maps $\mathfrak{C}$ into l_u . But Y is defined on $\mathfrak{C}$, and therefore $F = Y$, whence $Y(\mathfrak{C}) \subset l_u$. This gives a contradiction, since there exists a function f in $\mathfrak{C}$ such that $\|Yf\|_u = \infty$ [8, p. 190, (i)].

2.2. DEFINITIONS. The letter p is fixed throughout; $1 < p \neq 2$ and $p \neq \infty$. Suppose that B is of finite variation on S , and let $B_{\#p}$ denote the operator $x \rightarrow x \ast (YB)$ defined on l_p . More precisely: if $x = \{x_v\}_{v \in G}$, then $B_{\#p}x = \{b_n\}_{n \in G}$, where

$$b_n = \sum_{v \in G} x_v [YB]_{n-v}.$$

If $n \in G$, let I^n be the function defined on S by $I^n(\vartheta) = \vartheta^n$; thus $I^0(\vartheta) = 1$ and $I^1(\vartheta) = \vartheta$. We shall write $J = (I^1)_{\#p}$. If $H = -2\pi i J$, then $Hx = \{[Hx]_n\}_{n \in G}$ for x in l_p , where

$$[Hx]_n = \sum_{v \in G} x_v \frac{1}{n-v} \quad (v \neq n).$$

2.3. NOTATION. The Banach algebra of all bounded operators on l_p is denoted $\mathfrak{E}_p$; its topology is defined by the norm $T \rightarrow |T|_p$. The identity-operator I satisfies $Ix = x$ for all x in l_p .

2.4. LEMMA. If $B \rightarrow B(J)$ is a continuous homomorphism of $\mathfrak{P}$ into $\mathfrak{E}_p$ such that $I^0(J) = I$, then $I^1(J) \neq J$.

PROOF. By hypothesis, there exists a number $k_p > 0$ such that

$$(3) \quad |B(J)|_p \leq k_p \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}.$$

By way of contradiction, assume $I^1(J) = J$. If $B \in \mathfrak{P}$, then $B = \sum \alpha_n I^n$, and $B(J) = \sum \alpha_n I^n(J) = \sum \alpha_n J^n$. But $B \rightarrow B_{\#p}$ is a homomorphism on $\mathfrak{P}$ (see [4, § 3.2]); therefore $B_{\#p} = \sum \alpha_n J^n$ and $B_{\#p} = B(J)$. For any $u = p$, it thus follows from (3) that

$$(4) \quad |B_{\#u}|_u \leq k_p \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}.$$

If $P \in \mathfrak{P}$, define $B(\vartheta) = P(1 - \vartheta)$. It has been proved in [3, § 5.3] that $P_{\#p'} = (B_{\#p})^*$, where $p' = p/(p-1)$. Accordingly, if we use (4) with $u = p'$:

$$|P_{\#p'}|_{p'} = |B_{\#p}|_p \leq k_p \|B\|_\infty = k_p \|P\|_\infty \quad (\text{when } P \in \mathfrak{P}).$$

The first equality follows from $|T|_{p'} = |T^*|_p$ (see [7, p. 169]). Therefore (4) holds for both $u = p$ and $u = p'$. Hence, if $u = \min\{p, p'\}$, then

$$(5) \quad \|P_{\#u}x\|_u \leq k_p \|x\|_u \|B\|_\infty \quad \text{for all } B \text{ in } \mathfrak{P}.$$

Choose $x = \{\delta_n^0\}_{n \in G}$ (where δ_n^0 is the Kronecker delta) and note that $B_{\#u}x = x \ast (YB)$ and $\|x\|_u = 1$. From (5) therefore follows that $\|YB\|_u \leq k_p \|B\|_\infty$, which contradicts 2.1.

3. Some results of Dunford. The terminology in this paragraph comes from [1]. Set $\mathfrak{X} = l_p$ and consider a manifold Γ which is total in $\mathfrak{X}^*$. Let M be a compact subset of the plane. Let $\mathcal{B} = \mathcal{B}_M$ denote the σ -ring of subsets of M , and let $\mathcal{B}(M)$ be the space of all bounded complex-valued functions on M which are $\mathcal{B}$ -measurable; $\mathcal{B}(M)$ is normed by $F \rightarrow \sup \{ |F(m)| : m \in M \}$. If E is a spectral measure of class $(\mathcal{B}, \Gamma)$, then the integral

$$\int_M f(m) E(dm)$$

can be defined [1, p. 341]; it will be denoted $f(M, E)$, although Dunford writes it $S(f)$.

3.1. LEMMA. *The mapping $f \rightarrow f(M, E)$ is a continuous homomorphism of $\mathcal{B}(M)$ into $\mathfrak{G}_p$ (see [1, pp. 341–342]). Note that $I^0(M, E) = \mathbf{I}$.*

3.2. REMARKS. If T is a spectral operator of class $(\mathcal{B}, \Gamma)$ (see [1, p. 325]), then there exists a unique spectral measure E of class $(\mathcal{B}, \Gamma)$ commuting with T and which is such that

$$(i) \quad \sigma(T|E(a)\mathfrak{X}) \subset \text{closure}(a) \quad \text{for any } a \text{ in } \mathcal{B}.$$

Here $T|E(a)\mathfrak{X}$ denotes the restriction of T to the range of $E(a)$, while $\sigma(T) = \text{spectrum of } T$. The unique such spectral measure ("resolution of the identity" for T) will be denoted E^T . From [1, p. 325, Theorem 1] follows immediately that

$$(ii) \quad E^T(a \cap \sigma(T)) = E^T(a) \quad \text{for any } a \text{ in } \mathcal{B}.$$

3.3. LEMMA. If T is a scalar type operator of class (Γ) (see [1, p. 332]), then it is easily shown that $I^1(\sigma(T), E^T) = T$. In view of 3.1, we see that

(iii) *the mapping $f \rightarrow f(\sigma(T), E^T)$ is a continuous homomorphism of $\mathcal{B}(\sigma(T))$ into $\mathfrak{G}_p$ such that $I^0(\sigma(T), E^T) = \mathbf{I}$ and $I^1(\sigma(T), E^T) = T$.*

Suppose that $f \in \mathcal{B}(\sigma(T))$, and write $f \in a = \{m \in \sigma(T) : f(m) \in a\}$. From [1, pp. 341–342], we see that

(iv) *the operator $Q = f(\sigma(T), E^T)$ is a scalar type operator of class (Γ) , and E^Q is defined on the ring $\mathcal{B}_0$ of Borel sets of the plane by the relation $E^Q(a) = E^T(f \in a)$.*

4. The main results. As before, Γ is an arbitrary manifold which is total in $\mathfrak{X}^*$, and $\mathfrak{X} = l_p$. Let $\mathfrak{S}(\Gamma)$ be the set of all the members of $\mathfrak{G}_p$ which are scalar type operators of class (Γ) . If the operator J (defined in 2.2) belongs to $\mathfrak{S}(\Gamma)$, then the mapping $f \rightarrow f(\sigma(J), E^J)$ is a homomorphism of $\mathfrak{B}$ into $\mathfrak{G}_p$ which [in view of (iii)] contradicts the conclusion of 2.4. Thus

$$(a) \quad J \notin \mathfrak{S}(\Gamma).$$

Let $\tau_1 = U$ be the operator defined in § 1; it is easily seen that $U = \Phi_{\#p}$, where $\Phi(\vartheta) = \exp(-2\pi i \vartheta)$. If $R \in \mathfrak{G}_p$, then we define

$$(b) \quad \Phi(R) = \exp(-2\pi i R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^n (-2\pi i R)^v / v!, \quad m \rightarrow \infty,$$

the limit being taken in the topology of $\mathfrak{G}_p$.

4.1. LEMMA. Suppose that $R_1 \in \mathfrak{E}_p$. If $\sigma(R_1) \subset [0, 1]$ and $\Phi(R_1) = U$, then $R_1 = J$.

PROOF. Since $f \rightarrow f_{\#p}$ is a homomorphism of $\mathfrak{P}$ into $\mathfrak{E}_p$, it follows easily that $\sigma(f_{\#p})$ is included in the range of f (see [4, § 3.2 and § 4.2]); but $J = (I)_{\#p}$, and therefore $\sigma(J) \subset [0, 1]$. Now $U = \Phi_{\#p}$, and from [4, § 5.1] follows that $U = \Phi(J)$. Set $R_2 = J$, $n = 1, 2$. Hence $\sigma(R_n) \subset [0, 1]$ and $\Phi(R_n) = U$. Next, note that $\exp(i T_n) = iU$ when $T_n = -2\pi R_n + \pi I$. Since $U = \tau_1$, we have $|(iU)^k|_p = |U^k|_p = 1$ when $k \in G$; therefore iU is uniformly bounded [2]. Finally, $\sigma(T_n) \subset [-\pi, \pi]$ (using $\sigma[f(R_n)] = f[\sigma(R_n)]$; see [2, § 6.2]), and since $iU = \exp(i T_n)$, it can be inferred from [2, Theorem VI] that $T_1 = T_2$, whence $R_1 = R_2$. This concludes the proof; note that iU has no point spectrum, since $iU = (i\Phi)_{\#p}$ and [4, § 7.1].

4.2. THEOREM. $\tau_1 \in \mathfrak{S}(\Gamma)$.

PROOF. Suppose $\tau_1 = U \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. It is easy to see that $\sigma(U) = K = \{\lambda: |\lambda| = 1\}$ (see [4, § 6.3]). Let φ denote the one-to-one mapping $\vartheta \rightarrow \Phi(\vartheta)$ of $M = \{\vartheta: 0 \leq \vartheta < 1\}$ onto K , and let ψ be the inverse of φ :

$$(7) \quad (\psi \in M) = K \quad \text{and} \quad (\psi \in (\varphi \in a)) = a \cap K.$$

Since $\psi \in \mathcal{B}(K)$, it follows from (iv) that $\psi(K, E^U)$ is an operator R such that

$$(8) \quad R \in \mathfrak{S}(\Gamma) \quad \text{and} \quad E^R(b) = E^U(\psi \in b) \quad \text{for all } b \text{ in } \mathcal{B}_0.$$

Setting $b = M$, we obtain $E^R(M) = E^U(\sigma(U)) = I$ from (8), (7), and [1, Theorem 1]. From (i) therefore follows

$$(9) \quad \sigma(R) \subset [0, 1].$$

Since $\varphi \in \mathcal{B}(\sigma(R))$, we see from (iv) that $\varphi(\sigma(R), E^R)$ is a member V of $\mathfrak{S}(\Gamma)$ which satisfies the relations

$$E^V(a) = E^R(\varphi \in a) = E^U(\psi \in (\varphi \in a)) = E^U(a \cap K) = E^U(a)$$

for any a in $\mathcal{B}_0$ [this is seen by successively applying (iv), (8), (7), and (ii)]. Therefore $E^V = E^U$, whence

$$V = \int \lambda \cdot E^V(d\lambda) = \int \lambda \cdot E^U(d\lambda) = U.$$

Thus $\varphi(\sigma(R), E^R) = U$. But φ is the limit in $\mathcal{B}(\sigma(R))$ of a sequence of polynomials, and it follows from (iii) and (6) that $\varphi(\sigma(R), E^R) = \Phi(R)$. Therefore $\Phi(R) = U$, and it results from (9), 4.1, and (8) that $R = J \in \mathfrak{S}(\Gamma)$. This contradicts (a) and accordingly concludes the proof.

4.3. THEOREM. Neither H nor τ_{-1} belong to $\mathfrak{S}(\Gamma)$.

PROOF. If $H \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ and $f(\lambda) = i(2\pi)^{-1}\lambda$, then $f(\sigma(H), E^H) = i(2\pi)^{-1}H = J \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, which contradicts (a) [this comes from (iv); recall that $H = -2\pi iJ$]. If $T = \tau_{-1} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$ and $g(m) = m^{-1}$, then $g(\sigma(T), E^T) = T^{-1}$ (see [1, Theorem 7]); from (iv) therefore $T^{-1} \in \mathfrak{S}(\Gamma)$, which contradicts 4.2, since $T^{-1} = (\tau_{-1})^{-1} = \tau_1$.

5. Conclusion. Let T now denote any one of the four operators J, H, τ_1 , and τ_{-1} . Having shown that $T \notin \mathfrak{S}(I)$ does not exclude the possibility that T be a spectral operator. In that case, however, the "scalar part" of T (see [1, p. 335]) cannot be of the form $B_{\#p}$, where B is in the class (BV) of functions of finite variation. This can be seen as follows. If T is a spectral operator of some class (I) , then $T = S + N$, where $S \in \mathfrak{S}(I)$ and $\sigma(N) = \{0\}$ (see [1, p. 333]); note that $N \neq \mathbf{0}$ [since $T \notin \mathfrak{S}(I)$]. It is easily verified that the algebra $\mathfrak{A} = \{B_{\#p} : B \in (BV)\}$ has no radical [3, § 5.6]; therefore $N \notin \mathfrak{A}$, and since $T \in \mathfrak{A}$ we therefore cannot have $S \in \mathfrak{A}$.

References

- [1] DUNFORD, N.: Spectral operators. *Pacific J. of Math.* **4**, No. 2, 321–354 (1954). — [2] KRABBE, G. L.: On the logarithm of a uniformly bounded operator. *Trans. Amer. Math. Soc.* **81**, No. 1, 155–166 (1956). — [3] KRABBE, G. L.: Vaguely normal operators on a Banach space. To appear in the *Quart. J. Math., Oxford*. — [4] KRABBE, G. L.: Abelian rings and spectra of operators on l_p . *Proc. Amer. Math. Soc.* **7**, No. 5, 783–790 (1956). — [5] LORCH, E. R.: The integral representation of weakly almost periodic transformations in a reflexive vector space. *Trans. Amer. Math. Soc.* **49**, 18–40 (1941). — [6] LORCH, E. R.: The spectral theorem and classical analysis. *Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems*. Oklahoma Agric. and Mech. College, Oklahoma 1955, pp. 259–265. — [7] ZAAENEN, A. C.: *Linear Analysis*. Interscience 1953. — [8] ZYGMUND, A.: *Trigonometrical series*. Warszawa 1935.

Dept. of Math., Purdue University, Lafayette, Indiana (U.S.A.)

(Eingegangen am 20. Februar 1958)

Über einige mit dem Zwischenwertsatz verwandte Entwicklungen

Von

OTHMAR ZAUBEK

§ 1. Vorbemerkungen

Der von BOLZANO zuerst bewiesene Zwischenwertsatz für reelle stetige Funktionen mit zusammenhängenden Erklärungsbereichen läßt, wie bekannt ist, eine Verallgemeinerung auf gewisse Funktionen der ersten Baireschen Klasse zu¹⁾. Eine, insbesondere für die folgenden Entwicklungen wichtige andere Verallgemeinerung erhält man aus bekannten Sätzen über halbstetige Abbildungen und dem Satze, wonach die Hülle einer reellen Funktion eine nach oben halbstetige Abbildung ist²⁾. Diese letztere Verallgemeinerung kann man auch in anderer Weise und ohne Benützung dieser Sätze beweisen und aus der Beweisanordnung kann man durch eine entsprechende Modifikation derselben, auf weitere Sätze schließen, welche in gewisser Hinsicht weitere Verallgemeinerungen des Ausgangszwischenwertsatzes sind. Die Einzelheiten hierzu werden durch die in den folgenden Entwicklungen aufgestellten Sätze und Beweise unmittelbar gegeben. Auch ein mit diesen Sätzen zusammenhängendes Umkehrproblem wird in den folgenden Entwicklungen mit Hilfe eines, meines Wissens neuen Begriffes, nämlich des Begriffes der (unteren, bzw. oberen) Grenzdistanz einer Funktion behandelt.

Die in den folgenden Ausführungen verwendeten Begriffe und Bezeichnungen sollen, soweit diese nicht näher erklärt werden oder durch Hinweise festgelegt werden, wie meist üblich verstanden werden und im Zweifelsfalle genau so verstanden werden, wie diese in dem Werke HAUPT, AUMANN und PAUC, Differential- und Integralrechnung, 2. Aufl., Berlin 1948 usw. (im folgenden kurz als HAUPT angeführt) erklärt und verwendet werden.

Den reellen Zahlenraum bezeichnen wir mit R_1 und den durch die un-eigentlichen Zahlen $+\infty$ und $-\infty$ erweiterten reellen Zahlenraum bezeichnen wir mit R_1^0 . Um eine deutlichere Unterscheidung vom Limes durchzuführen, wird die jetzt häufig gebrauchte Bezeichnung Limeswert und Limeswertmenge nicht verwendet und dafür die Bezeichnung Häufungswert und Hüllenwert, bzw. Häufung und Hülle verwendet. Da ferner in der Punktmengenlehre die Bezeichnung Berührungspunkt in anderer Weise derzeit verwendet wird als seit Jahrtausenden in der Geometrie und diese daher bei der Anwendung

¹⁾ Man vgl. hierzu z. B. HAUSDORFF: Mengenlehre, Berlin u. Leipzig 1935, S. 255—256. Dieses Werk wird kurz als HAUSDORFF angeführt.

²⁾ Man vgl. hierzu z. B. H. HAHN: Reelle Funktionen, Leipzig 1932, S. 151, Satz 21.4.1 und Satz 21.4.2 und S. 189 Satz 26.1.5. Dieses Werk wird kurz als HAHN angeführt.

der Punktmengenlehre auf die Geometrie zu Verwechslungen Anlaß geben kann, verwende ich an dessen Stelle die meines Wissens noch freie Bezeichnung „Anpunkt“ einer Punktmenge. Es werden also folgende Begriffe und Bezeichnungen verwendet:

ERKLÄRUNG 1. Ist A eine Punktmenge des topologischen³⁾ Raumes T , dann heiße der Punkt a von T ein Anpunkt von A , wenn für jede Umgebung U von a der Durchschnitt AU nicht leer ist.

Sind T und T^* topologische Räume, $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge aus T und deren Wertmenge eine Punktmenge aus T^* ist, und ist a ein Anpunkt von A , dann heiße der Punkt h aus T^* dann und nur dann ein Hüllenwert $h(f|A; a)$, bzw. ein Häufungswert $h'(f|A; a)$ von $f|A$ in a , wenn es zu jeder Umgebung V von h in T^* und zu jeder Umgebung U von a , bzw. zu jeder reduzierten Umgebung U' von a in T in AU , bzw. in AU' mindestens einen Punkt b gibt, so daß mindestens ein Funktionswert von f in b ein Punkt von V ist.

Für jeden Anpunkt a von A heiße die Menge aller $h(f|A; a)$, bzw. aller $h'(f|A; a)$ die Hülle $H(f|A; a)$, bzw. die Häufung oder reduzierte Hülle $H'(f|A; a)$ von $f|A$ in a .

Da eine Reihe von Sätzen über kompakte Punktmengen, bzw. über Funktionen mit kompakten Erklärungsbereichen bei der jetzt meist üblichen Erklärung der kompakten Punktmengen nur in Fréchet'schen Räumen bewiesen werden, halte ich es für zweckmäßig, neben oder an Stelle des jetzt üblichen Begriffes der kompakten Menge den älteren, auf dem Begriff des Häufungspunktes im älteren und ursprünglichen Sinne basierenden Kompaktbegriff zu verwenden. Wir setzen daher für die folgenden Entwicklungen fest:

ERKLÄRUNG 2. Ist A eine Punktmenge des topologischen Raumes T dann heiße der Punkt h dann und nur dann mindestens ein schwacher Häufungspunkt oder kurz ein Schwachpunkt, bzw. ein Häufungspunkt für A , wenn für jede reduzierte Umgebung U' von h der Durchschnitt AU' nicht leer, bzw. eine unendliche Punktmenge ist.

Die Punktmenge A heiße schwachkompakt bzw. kompakt, wenn entweder A eine endliche Menge ist oder wenn jede unendliche Teilmenge derselben einen Schwachpunkt, bzw. Häufungspunkt in T hat.

Ganz entsprechend werden die Begriffe insichschwachkompakt und insichkompakt gebildet.

Für unsere Entwicklungen benötigen wir noch einen allgemeineren Durchschnittssatz, welchen ich bisher bei anderen Autoren zumindest nicht ausdrücklich ausgesprochen vorfand⁴⁾.

DURCHSCHNITTSSATZ. Ist $\mathfrak{S}$ ein nicht leeres System von Mengen eines topologischen Raumes T , für welches es zu jeder Menge A aus $\mathfrak{S}$ endlich viele Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ aus $\mathfrak{S}$ gibt, so daß der Durchschnitt $D(A) = AA_1A_2 \dots A_n$

³⁾ HAUPT I, S. 178/179. Nach G. NÖBELING, Grundlagen der analytischen Topologie, Berlin 1954, S. 47 heißt ein derartiger Raum klassisch topologisch.

⁴⁾ Man vgl. hierzu auch das Werk bei ³⁾ S. 98, Satz 12.3.

kompakt und abgeschlossen ist, und ist ferner für mindestens eine Menge B aus $\mathfrak{S}$ $D(B)$ rational, so ist der Durchschnitt D^* aller Mengen aus $\mathfrak{S}$ dann und nur dann nicht leer, wenn der Durchschnitt aller Mengen eines jeden endlichen und nicht leeren Teilsystems $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{S}$ nicht leer ist.

BEWEIS. Die Bedingung ist hinreichend: Ist $\mathfrak{S}^*$ das System aller $D(A)$ für alle $A \in \mathfrak{S}$, so ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{S}^*$ gleich D^* . In $\mathfrak{S}^*$ gibt es eine rationale Menge B^* . Wir betrachten nun das nicht leere System $\mathfrak{D}$ der Durchschnitte der Mengen von $\mathfrak{S}^*$ mit B und beziehen uns weiter auf den durch T in B erzeugten rationalen topologischen Raum B^* . Nach der Erklärung des rationalen Raumes ist daher D^* gleich dem Durchschnitt abzählbar vieler Mengen $C_1, C_2, \dots$ aus $\mathfrak{D}$. Setzen wir $D_n = C_1 C_2 \dots C_n$, so ist der Durchschnitt aller D_n gleich D^* . Da jede Menge aus $\mathfrak{D}$ Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{S}$ ist, hat daher auch D_n für jedes natürliche n diese Eigenschaft. Nach dem Cantorsche Durchschnittssatz ist daher D^* nicht leer. Daß die Bedingung des Satzes notwendig ist, ergibt sich unmittelbar.

Da nun nach bekannten Sätzen jede insichkompakte metrische Menge abgeschlossen und rational ist, ergeben sich aus diesem Durchschnittssatz für den metrischen Raum und für den R_1^0 noch folgende, leicht anwendbare Verallgemeinerungen des Cantorsche Durchschnittssatzes:

SATZ 1. *Ist $\mathfrak{S}$ ein beliebiges nicht leeres System insichkompakter Mengen eines metrischen Raumes, so ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{S}$ dann und nur dann nicht leer, wenn jeder Durchschnitt aus je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{S}$ nicht leer ist.*

SATZ 2. *Ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges nicht leeres System abgeschlossener Mengen des R_1^0 , so ist der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathfrak{A}$ dann und nur dann nicht leer, wenn jeder Durchschnitt aus je endlich vielen Mengen aus $\mathfrak{A}$ nicht leer ist.*

§ 2. Ein Zwischenhüllenwertsatz

ZWISCHENHÜLLENWERTSATZ. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T ist, und $\bar{A}$ die (in T) abgeschlossene Hülle von A und ist ferner B eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:*

1. B ist der Durchschnitt von A mit einer offenen Menge O ,
2. es gibt eine zusammenhängende Menge Z , so daß $B \subseteq Z \subseteq \bar{A} \cap O$ ist,
3. in jedem Punkte x von Z ist die Hülle $H(f|A; x)$ zusammenhängend, dann ist jede reelle Zahl r , welche zwischen der unteren Grenze g und der oberen Grenze G der auf B eingeschränkten Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ liegt, Hüllenwert der Teilfunktion $f|B$, d.h. es gibt mindestens einen Punkt p der abgeschlossenen Hülle $\bar{B}$ von B , so daß r Hüllenwert $h(f|B; p)$ von $f|B$ in p ist.

g , bzw. G ist unabhängig von den Voraussetzungen 1. bis 3. für jede Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ Hüllenwert von $f|B$, wenn es ein $m > g$, bzw. ein $n < G$ gibt, so daß die Punktmenge $B[f < m]$, bzw. $B[f > n]$ kompakt ist.

BEWEIS. Ist x ein beliebiger Punkt von Z , so ist, da $Z \leq 0$ ist, x Punkt von 0 und da 0 offen ist, ist daher $H(f|A_0; x) = H(f|A; x)$. Da $A_0 = B$ ist, ist also nach 3. für jedes $x \in Z$ $H(f|B; x)$ zusammenhängend. Ist nun $g < r < G$, dann bilden wir die Menge Z_r aller und nur der Punkte z aus Z , für welche jeder Hüllenwert $h(f|B; z) > r$ ist. Z_r ist offen in Z . Denn wäre ein Punkt z_0 von Z_r Häufungspunkt von $Z - Z_r$, so gäbe es in jeder Umgebung U von z_0 mindestens einen Punkt q mit einem Hüllenwert $h(f|B; q) \leq r$. Daher gäbe es nach den Eigenschaften eines topologischen Raumes eine Umgebung V von q , welche Teilmenge von U ist, so daß es zu jedem $\sigma > 0$ einen Punkt q' aus AV gäbe, für welchen mindestens ein Funktionswert $f(q') < r + \sigma$ ist. Also würde für jede Umgebung U von z_0 die im R_1^0 abgeschlossene Hülle $W^0(f|BU)$ der Wertmenge $W(f|BU)$ der auf BU eingeschränkten Teilfunktion $f|BU$ von $f|B$ mindestens eine Zahl $\varrho \leq r$ enthalten. Es wäre daher der Durchschnitt $[-\infty, r] W^0(f|BU)$ für jede Umgebung U von z_0 nicht leer. Sind $U_1, U_2, \dots, U_s$ endlich viele Umgebungen von z_0 , so ist nach den Eigenschaften eines topologischen Raumes auch der Durchschnitt $U_1 U_2 \dots U_s = U^*$ eine Umgebung von z_0 und da $W^0(f|BU^*) \subseteq W^0(f|BU_i)$ für $i = 1, 2, \dots, s$ ist, wäre daher der Durchschnitt aller $[-\infty, r] W^0(f|BU)$ für alle möglichen Umgebungen U von z_0 nach dem Satze 2 nicht leer. Da nun der Durchschnitt aller $W^0(f|BU)$ für alle möglichen Umgebungen U von z_0 gleich der Hülle $H(f|B; z_0)$ ist⁵⁾, enthielte daher $H(f|B; z_0)$ eine Zahl $r' \leq r$. Dies stünde aber im Widerspruch damit, daß $z_0 \in Z_r$ ist. Genau entsprechend kann man zeigen, daß die Menge Z'_r aller und nur der Punkte z aus Z , für welche jeder Hüllenwert $h(f|B; z) < r$ ist, offen in Z ist. Da $g < r < G$ ist, ist in mindestens einem Punkte a von B mindestens ein Funktionswert $f(a) < r$ und in mindestens einem $b \in B$ ein Funktionswert $f(b) > r$. Es kann daher weder Z_r noch Z'_r gleich Z sein. Da nun Z_r und Z'_r zueinander fremd und offen in Z sind und Z zusammenhängend nach 2. ist, ist daher die Menge $Z' = Z - (Z_r + Z'_r)$ nicht leer. Ist $p \in Z'$, so ist, wie am Anfange des Beweises festgestellt wurde, $H(f|B; p)$ zusammenhängend und enthält daher die Zahl r , w. z. b. w. Der Beweis des letzten Teiles des Satzes bietet keine Schwierigkeiten.

Um die Allgemeinheit des Zwischenhüllenwertsatzes zu überprüfen, betrachten wir folgendes Beispiel: Es sei $E = E_2$ die kartesische Ebene, $(x > 0)$ und $(y \leq 0)$ die entsprechenden Halbebenen derselben, $A = E - (x > 0)(y \leq 0)$ und $f|A$ die eindeutige Punktfunktion auf A , für welche $f(x, y) = 1$ für $x \leq 0$, $f(x, y) = 0$ für $0 < y \leq x$ und $f(x, y) = \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{\pi}{4} \right)$ für $0 < x < y$ ist. Dabei soll unter $\operatorname{arctg} z$ diejenige Bestimmung des Arkustangens verstanden werden, für welche $0 \leq \operatorname{arctg} z < \pi$ ist. $f|A$ ist dann mit Ausnahme des Punktes $(0, 0)$ stetig und hat im Punkte $(0, 0)$ die Hülle $[0, 1]$. Man sieht sogleich, daß für jeden Punkt x der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A in E die Hülle $H(f|A; x)$ zusammenhängend ist. Ist nun B die Menge $(x < 0) + (0 < y < x)$ aus E , so ist B offen und eine Teilmenge von A . Ferner ist die Menge $Z = B +$

⁵⁾ HAUPT I, S. 200.

$\{(0, 0)\}$ eine zusammenhängende Obermenge von B , für welche sogar $Z \subseteq \bar{B}$ ist. Jede offene Menge O aus E , für welche $A \cap O = B$ ist, enthält den Punkt $(0, 0)$ nicht, daher kann Z nicht Teilmenge von $\bar{A} \cap O$ sein. Betrachten wir nun die Teilfunktion $f|_B$ von $f|_A$, so sind alle Voraussetzungen des Zwischenhüllenwertsatzes mit Ausnahme der Bedingung $Z \subseteq \bar{A} \cap O$ für $f|_B$ erfüllt, und zwar ist diese letztere Bedingung bloß für einen einzigen Punkt von Z nicht erfüllt. $f|_B$ nimmt trotzdem nur die Werte 0 und 1 an. Man sieht aus diesem Beispiele, daß bei der Verwendung der im Satze auftretenden Begriffe dieser Satz bereits sehr allgemein ist. Wir werden später sogar bei engeren Voraussetzungen eine gewisse Umkehrung dieses Satzes beweisen können.

Wir können nun aus dem Zwischenhüllenwertsatz eine Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes gewinnen. Zu diesem Zwecke verwenden wir folgende Ausdrucksweise:

ERKLÄRUNG 3. Ist $f|_A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion mit dem Erklärungsbereich A und B eine beliebige Punktmenge, dann heiße die Menge aller und nur der Punkte z des Wertesraumes T^* von $f|_A$, zu welchen es mindestens einen Punkt b aus B gibt, so daß $z \in H'(f|_A; b)$ und außerdem für jeden Punkt $x \in AB$ jeder Funktionswert $f(x) \neq z$ ist, der Häufungswerteüberschuß $\dot{U}(f|_A; B)$ von $f|_A$ für die Menge B .

Dann haben wir den Satz:

VERALLGEMEINERTER ZWISCHENWERTSATZ. Bei den Bezeichnungen und Voraussetzungen des Zwischenhüllenwertsatzes nimmt $f|_B$ genau alle Werte zwischen ihrer unteren und oberen Grenze mit Ausnahme des Häufungswerteüberschusses von $f|_B$ für die Menge Z an.

Da der Häufungswerteüberschuß einer Funktion $f|_A$ für jede Obermenge C von A eine Randmenge im Wertesraum der Funktion ist, ergibt sich noch folgender Zusatz:

ZUSATZ. Bei den Bezeichnungen und Voraussetzungen des Zwischenhüllenwertsatzes nimmt $f|_B$ alle Werte zwischen ihrer unteren und oberen Grenze mit Ausnahme (höchstens) einer Randmenge im R_1^0 an.

§ 3. Ein Zwischenwertnäherungssatz

Für manche Untersuchungen ist es zweckmäßig, neben dem Begriff der zusammenhängenden Menge und der Komponente einen Begriff zu verwenden, welcher von der Distanz zweier Punkte in einer metrischen Punktmenge abgeleitet werden kann. Es handelt sich dabei um den folgenden Begriff:

ERKLÄRUNG 4⁶⁾. Die obere Grenze der Distanzen⁷⁾ je zweier Punkte einer mehrpunktigen metrischen oder allgemeiner halbmetrischen Menge heiße die innere Distanz dieser Punktmenge. Die innere Distanz einer höchstens einpunktigen metrischen (halbmetrischen) Menge wird Null gesetzt.

Für den R_1^0 erweitern wir diesen Begriff mit Hilfe der

⁶⁾ Man vgl. hierzu auch O. ZAUBEK: Math. Ann. 128, 293 (1954).

⁷⁾ HAUSDORFF, S. 158.

ERKLÄRUNG 5. Sind a und b zwei verschiedene Punkte einer Menge A des R_1^0 , dann heiße a mit b in A für $0 < \kappa \leq +\infty$ durch eine κ -Kette verbunden oder verbindbar, wenn es eine abzählbare Teilmenge $K = \{a_1, a_2, \dots\}$ aus A gibt, so daß die Entfernung $\|a_i, a_{i+1}\| \leq \kappa$ für $i = 1, 2, \dots$ ist und a und b Anpunkte von K im R_1^0 sind. Die untere Grenze aller Zahlen κ , für welche a und b in A durch eine κ -Kette verbunden sind, heiße die Distanz $d(a, b; A)$ der Punkte a und b in A .

Man zeigt nun leicht, daß die Distanz zweier Punkte einer Menge des R_1 nach der Erklärung 5 den gleichen Wert hat wie im bisherigen Sinne, so daß durch den Begriff der Erklärung 5 eine zulässige Erweiterung des Begriffes der Distanz auf den R_1^0 gegeben wird.

Mit Hilfe dieses erweiterten Begriffes der Distanz $d(a, b; A)$ erklären wir ganz entsprechend der Erklärung 4 die innere Distanz $i(A)$ einer Punktmenge A des R_1^0 .

Man beweist ohne Schwierigkeiten den für die Anwendungen wichtigen

SATZ 3. Damit die Menge A des R_1^0 zusammenhängend ist, ist notwendig, daß $i(A) = 0$ ist. Ist A abgeschlossen, so ist diese Bedingung auch hinreichend.

Diese Begriffe können unmittelbar auf den Raum der Analysis für eine oder mehrere komplexe Veränderliche übertragen werden. Auch ein dem Satze 3 entsprechender Satz gilt für die Punktmengen dieser Räume.

Wir wollen ferner noch folgende Ausdrucksweise verwenden:

ERKLÄRUNG 6. Die endliche Zahl z heiße durch die Zahlenmenge A mit höchstens der Ungenauigkeit oder kurz mit der Ungenauigkeit γ angenähert, wenn es zu jedem $\sigma > 0$ mindestens eine Zahl x aus A gibt, so daß $|z - x| < \gamma + \sigma$ ist. z heiße durch die Funktion f mit der Ungenauigkeit γ angenähert, wenn z durch die Wertmenge von f mit der Ungenauigkeit γ angenähert wird.

Es gilt dann der

ZWISCHENWERTNÄHERUNGSSATZ. Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T ist, und $\bar{A}$ die abgeschlossene Hülle von A , ist ferner B eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

1. B ist der Durchschnitt von A mit einer offenen Menge O ,
 2. es gibt eine zusammenhängende Menge Z , so daß $B \subseteq Z \subseteq \bar{A}O$ ist,
 3. in jedem Punkte x von Z ist $i[H(f|A; x)] \leq j$,
- dann wird jede Zahl r zwischen der oberen und unteren Grenze der Teilfunktion $f|B$ von $f|A$ mit der Ungenauigkeit $j/2$ angenähert. Oder kürzer: Bei den vorhergehenden Voraussetzungen ist $i[W(f|B)] \leq j$.

BEWEIS. Der Beweis dieses Satzes kann weitgehend analog dem Beweise des Zwischenhüllenwertsatzes geführt werden. Wir verwenden daher die beim Beweise des Zwischenhüllenwertsatzes verwendeten Mengen und Bezeichnungen. Zunächst ergibt sich durch die entsprechenden Schlußweisen wie bei jenem Beweise, daß Z' nicht leer ist. Ist $c \in Z'$, so ist, wie dort gezeigt wurde,

$H(f/A; c) = H(f/B; c) = H$. Also ist nach der Voraussetzung 3. $i(H) \leq j$. H enthält nach ihrer Erklärung mindestens eine Zahl $\lambda \geq r$ und mindestens eine Zahl $\mu \leq r$. Ist nun λ_0 die untere Grenze aller $\lambda \geq r$ von H und μ_0 die obere Grenze aller Zahlen $\mu \leq r$ aus H , so ist, da $i(H) \leq j$ ist, $\lambda_0 - \mu_0 \leq j$. r ist Zahl des abgeschlossenen Intervalls $[\mu_0, \lambda_0]$ und daher wird r durch f/B mit der Ungenauigkeit $j/2$ angenähert.

Bemerkung. Ist bei den Voraussetzungen des Zwischenwertnäherungssatzes in jedem Punkte x von Z $i[H(f/A; x)] = 0$, so ist nach diesem Satze $i[W(f/B)] = 0$. Aus $i[W(f/B)] = 0$ kann aber im allgemeinen nicht geschlossen werden, daß jeder Zwischenwert zwischen der unteren und oberen Grenze von f/B ein Hüllenwert von f/B ist. Diese Folgerung kann man dagegen z.B. machen, wenn B kompakt ist. Andererseits folgt aus dem Satze 3 aus $i[H(f/A; x)] = 0$, daß $H(f/A; x)$ zusammenhängend ist, so daß bei den vorhergehenden Voraussetzungen auch diejenigen des Zwischenhüllenwertsatzes erfüllt sind. Der Zwischenhüllenwertsatz ist daher im allgemeinen Falle keine Folge des Zwischenwertnäherungssatzes. Dagegen folgt der vorhin erwähnte Zusatz auch aus dem Zwischenwertnäherungssatze.

Unsere bisherigen Aussagen bezogen sich auf Funktionen bzw. Teilfunktionen, für welche die abgeschlossene Hülle des Erklärungsbereiches derselben zusammenhängend war. Man kann nun für Funktionen mit metrischen Erklärungsbereichen allgemeinere Hüllen einführen und mit deren Hilfe einen allgemeineren Zwischenwertnäherungssatz für diese Klasse von Funktionen beweisen. Wir wollen jedoch hier der Kürze halber auf diese Hüllen und den entsprechenden Zwischenwertnäherungssatz nicht eingehen.

§ 4. Die untere und obere Grenzdistanz einer Funktion mit einigen Anwendungen. Zwischenwertumkehrsatz

Die bisherigen Ergebnisse gestatten aus gewissen Zusammenhangeigenschaften, bzw. Aussagen über die innere Distanz der Hülle einer Funktion f auf gewissen, mit dem Erklärungsbereich von f in Beziehung stehenden Mengen, Schlüsse über Zusammenhangeigenschaften, bzw. über die innere Distanz der Wertmenge $W(f)$ zu machen.

Für manche Untersuchungen ist es auch zweckmäßig, Schlußfolgerungen in umgekehrter Richtung machen zu können. Wir wollen dies mit Hilfe des folgenden Begriffes machen:

ERKLÄRUNG 7. Ist f/A eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T und deren Wertmenge $W(f/A)$ eine Punktmenge eines metrischen Raumes M oder des R_1^0 ist, und ist x_0 ein Anpunkt von A , dann heiße die untere (obere) Grenze aller reellen Zahlen z , zu welchen es zu jeder Umgebung U von x_0 eine Umgebung V von x_0 gibt, so daß $V \subseteq U$ und die innere Distanz der Wertmenge $W(f/AV)$ über Teilfunktion f/AV von f/A nicht größer (nicht kleiner) als z ist, die untere (obere) Grenzdistanz $\underline{\delta}(f/A; x_0)$ ($\bar{\delta}(f/A; x_0)$) von f/A in x_0 . Ist x_0 ein Schwachpunkt

von A und wird statt der Umgebung U von x_0 eine reduzierte Umgebung U' von x_0 genommen usw., so heiße die analog gebildete Groe $\underline{\delta}'(f/A; x_0)$ ($\bar{\delta}'(f/A; x)$) reduzierte untere (obere) Grenzdistanz von f/A in x_0 .

Für Funktionen einer reellen Veränderlichen kann man mit Hilfe der Rechts- und Linksumgebungen analog rechte und linke untere (obere), bzw. reduzierte Grenzdistanzen erklären.

Für die Anwendungen der Grenzdistanz sind nun die beiden folgenden Sätze von Bedeutung.

SATZ 4. *Ist f/A eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Wertmenge W eine kompakte Menge eines metrischen Raumes ist, so ist in jedem Anpunkte a von A $\bar{\delta}(f; a) = \underline{\delta}(f; a) = i[H(f; a)]$ und wenn a ein Schwachpunkt für A ist, ist auch $\bar{\delta}'(f; a) = \underline{\delta}'(f; a) = i[H'(f; a)]$.*

BEWEIS. Da W eine kompakte metrische Menge ist, ist die abgeschlossene Hülle $\bar{W}$ von W nach einem bekannten Satze⁸⁾ insichkompakt. Wir legen nun für die Wertmenge W von f/A die insichkompakte Menge $\bar{W}$ als Raum zugrunde. Da jede kompakte metrische Menge rational ist, zeigt man ziemlich leicht, daß es eine Folge $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ von Umgebungen U_n von a gibt, so daß $H(f; a) = \bigcap_n \bar{W}(f/A U_n) = D$ ist, wobei $\bar{W}(f/A U_n)$ die abgeschlossene Hülle der Wertmenge $W(f/A U_n)$ ist. Setzen wir zur Abkürzung $\bar{W}_n = \bar{W}(f/A U_n)$, so ist $\bar{W}_{n+1} \subseteq \bar{W}_n$ für jedes natürliche n und da der Raum $\bar{W}$ insichkompakt ist, ist D gleich dem metrischen Limes⁹⁾ der Folge $(\bar{W}_n)$. Nach einem weiteren Satze¹⁰⁾ ist daher $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(\bar{W}_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} i(\bar{W}_n) = i[H(f/A; a)]$. Ist andererseits $\underline{\delta} = \underline{\delta}(f; a)$ und $\sigma > 0$, so gibt es nach der Erklärung von $\underline{\delta}(f; a)$ zu jeder der obigen Umgebungen U_n von a eine Umgebung V_n von a , so daß $V_1 \subseteq U_1$ und $V_n \subseteq U_n \cap V_{n-1}$ für $n \geq 2$ und $|i[W(f/A V_n; a)] - \underline{\delta}| < \sigma$ ist. Da andererseits $V_n \subseteq U_n$ ist, ist daher $\bar{W}_n(f/A V_n) = D$. Da die Folge $(\bar{W}_n(f/A V_n))$ monoton abnehmend ist, ist daher, da der Raum $\bar{W}$ insichkompakt ist, D wieder gleich dem metrischen Limes dieser Folge, so daß sich schließlich wieder $\lim_{n \rightarrow +\infty} i[W(f/A V_n)] = i(D)$ ergibt. Da $\sigma > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist daher $\underline{\delta} = i(D) = i[H(f/A; a)]$. Ganz entsprechend beweist man, daß $\bar{\delta} = i[H(f/A; a)]$ ist. Der Beweis der anderen Behauptungen des Satzes kann ganz entsprechend geführt werden.

Ein analoger Satz gilt für die rechten und linken unteren (oberen) Grenzdistanzen.

Nennen wir eine Punktfunktion f/A , also eine Funktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes ist, im Anpunkte a von A kompakt, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so daß die Wertmenge $W(f/A U)$ der Teilfunktion $f/A U$ von f/A kompakt im Werttraume ist, so ergibt sich aus dem Satze 4 sogleich der

⁸⁾ HAHN, S. 93, Satz 15.2.4.

⁹⁾ HAUSDORFF, S. 146 u. S. 150, Satz V.

¹⁰⁾ Man vgl. die Arbeit unter ⁶⁾ S. 293, Satz 4.

ZUSATZ. Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Wertmenge metrisch ist und ist f im Anpunkte a von A kompakt, so ist $\bar{\delta}(f; a) = \underline{\delta}(f; a) = i[H(f; a)]$ und wenn a ein Schwachpunkt von A ist, ist $\bar{\delta}'(f; a) = \underline{\delta}'(f; a) = i[H'(f; a)]$.

Im R_1^0 , welcher nach unserer Erklärung kein metrischer Raum ist, gilt der Satz 4 nicht im vollen Ausmaße, was später noch nachgewiesen wird. Doch gilt wenigstens der folgende, für die Anwendungen bedeutsame

SATZ 5. Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige reelle Punktfunktion, so ist in jedem Anpunkte a von A $\bar{\delta}(f|A; a) \geq \underline{\delta}(f|A; a) \geq i[H(f|A; a)]$, bzw. wenn a Schwachpunkt für A ist, ist auch $\bar{\delta}'(f|A; a) \geq \underline{\delta}'(f|A; a) \geq i[H'(f|A; a)]$. Die Gleichheitszeichen gelten in diesen Beziehungen höchstens dann nicht, wenn $H(f|A; a)$, bzw. $H'(f|A; a)$ nur eine einzige Zahl enthält, welche unendlich ist.

Dieser Satz wird nun mit Hilfe des folgenden Satzes analog wie der Satz 4 bewiesen.

SATZ 6. Ist (A_n) eine nicht steigende Folge abgeschlossener Zahlenmengen des R_1^0 , A der Durchschnitt aller Mengen der Folge und enthält A entweder keine unendliche Zahl oder wenn A eine unendliche Zahl u enthält, mindestens noch eine von u verschiedene (endliche oder unendliche) Zahl, so hat die Folge $(i(A_n))$ einen (endlichen oder unendlichen) Grenzwert und es ist $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) = i(A)$.

BEWEIS. Enthält A nur eine einzige endliche Zahl z , so enthalten für jedes $\sigma > 0$ nach dem Cantorschen Durchschnittssatze oder nach dem Satze 2 die abgeschlossenen Intervalle $[-\infty, z - \sigma]$ und $[z + \sigma, +\infty]$ des R_1^0 höchstens aus endlich vielen Mengen A_n Punkte. Es ist daher der Durchmesser von A_n für fast alle n nicht größer als 2σ , also ist $i(A_n) \leq 2\sigma$ für fast alle n . Daraus folgt, daß $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) = 0 = i(A)$ ist. Enthält nun A mehr als bloß eine Zahl, so enthält A , da A abgeschlossen im R_1^0 ist, eine kleinste Zahl k und eine größte Zahl g . Ist dann $i(A) > 0$, so gibt es zu jeder reellen Zahl α , für welche $0 < \alpha < i(A)$ ist, ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ der Länge α , so daß A mindestens eine Zahl $c < a$ und mindestens eine Zahl $d > b$ enthält und daß außerdem der Durchschnitt $A[a, b]$ leer ist. Nach dem Cantorschen Durchschnittssatze ist dann auch $A_n[a, b]$ für fast alle n leer. Also ist, da A_n die Zahlen c und d enthält, $i(A_n) \geq \alpha$ für fast alle n . Daher ist in diesem Falle $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) \geq i(A)$ und diese Beziehung ist auch richtig, wenn $i(A) = 0$ ist.

Ist nun $i(A) < +\infty$ und $\sigma > 0$, so kann k mit g durch eine $(i(A) + \sigma)$ -Kette in A verbunden werden. Ist K diese Kette, so ist $K \subseteq A \subseteq A_n$ für jedes natürliche n . k ist daher mit g durch K in jedem A_n verbunden. Sind nun k und g beide endlich, so sind nach dem Cantorschen Durchschnittssatze die Durchschnitte von A_n mit den abgeschlossenen Intervallen $[-\infty, k - \sigma]$ und $[g + \sigma, +\infty]$ für fast alle n leer. Also sind in diesem Falle je zwei Punkte von A_n für fast alle n durch eine $(i(A) + \sigma)$ -Kette in A_n verbunden. Dies gilt auch, wie man sogleich sieht, wenn g oder k oder beide Zahlen unendlich sind. Es ist daher $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(A_n) \leq i(A)$, eine Beziehung, welche auch in dem bisher ausgeschlossenen Falle $i(A) = +\infty$ richtig ist. Dieses Ergebnis gibt mit dem

vorhergehenden über den unteren Limes von $((i(A_n)))$ die Behauptung des Satzes.

Man beachte, daß die einschränkenden Voraussetzungen des Satzes ohne einen entsprechenden Ersatz nicht weggelassen werden können. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Folge $((A_n))$ für welche A_n für jedes natürliche n aus allen natürlichen Zahlen $\geq n$ und aus $+\infty$ besteht, dann ist A die aus $+\infty$ allein bestehende Menge und daher ist $i(A) = 0$, während $i(A_n) = 1$ für jedes n ist. Auf ähnliche Weise kann man Mengenfolgen aus dem R_1^0 bilden, für welche die Folge $((i(A_n)))$ keinem Grenzwert zustrebt. Ist N die Menge aller natürlichen Zahlen und f/N die reelle eindeutige Funktion auf N , welcher jeder Zahl aus N diese Zahl selbst zuordnet, so ist im Anpunkte $+\infty$ von N $\delta(f; +\infty) = +\infty$, $\underline{\delta}(f; +\infty) = 1$ und $i[H(f; +\infty)] = 0$. Wir sehen aus diesem einfachen Beispiele, daß es reelle Funktionen gibt, welche im fraglichen Anpunkte sogar einen (unendlichen) Grenzwert haben und für welche die Gleichheitszeichen im Satze 5 nicht gelten. Man kann daraus schließen, daß man mit Hilfe der unteren und oberen Grenzdistanz gewisse Zusammenhangseigenschaften der Wertmenge einer Funktion feiner beschreiben kann als mit Hilfe der Hülle bzw. dem Grenzwert- und Stetigkeitsbegriff.

Wir wollen nun als wichtige Anwendung der Grenzdistanz die Frage einer Umkehrung des Zwischenwertnäherungssatzes und des Zwischenhüllenwertsatzes behandeln. Zu diesem Zwecke beweisen wir den

ZWISCHENWERTUMKEHRSAZ. *Ist f/A eine ein- oder mehrdeutige reelle Funktion, deren Erklärungsbereich A eine Punktmenge eines topologischen Raumes T ist und zu der es eine lokalzusammenhängende¹¹⁾ Menge L aus T gibt, so daß $A \subseteq L \subseteq \bar{A}$ ist, so ist, damit für jede Teilmenge B von A , für welche es ein Relativgebiet L_B ¹²⁾ in L gibt, so daß $B = AL_B$ ist, die innere Distanz $i[W(f/B)]$ der Wertmenge $W(f/B)$ der auf B eingeschränkten Teilfunktion $f|B$ von f/A im R_1^0 höchstens den Wert j hat, notwendig (und hinreichend), daß in jedem Punkte x von L $i[H(f/A; x)] \leq j$ ist.*

BEWEIS. Wir beziehen unsere Überlegungen auf den durch T in L erzeugten topologischen Raum L^* . Ist dann x ein beliebiger Punkt von L , so gibt es, da L lokalzusammenhängend ist, zu jeder Umgebung U von x ein Gebiet $L_B = L_B(U) \subseteq U$, welches x enthält. Wir betrachten nun die Punktmenge $B = B(U) = AL_B(U)$. Da L_B zusammenhängend und offen ist, ist daher nach den Voraussetzungen $i[W(f/B)] \leq j$. Da nun U eine beliebige Umgebung von x ist, gibt es also zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung $V = L_B(U)$ von x , so daß $V \subseteq U$ und $i[W(f/AV)] \leq j$ ist. Nach der Erklärung der unteren Grenzdistanz ist daher $\underline{\delta}(f/A; a) \leq j$. Nach dem Satz 5 ist daher $i[H(f/A; a)] \leq j$. Daß die Bedingung des Satzes hinreichend ist, folgt sogleich aus dem Zwischenwertnäherungssatze.

Setzen wir in diesem Satze $j = 0$, so erhalten wir aus diesem Satze und dem Satze 3 eine entsprechende Umkehrung des Zwischenhüllenwertsatzes.

¹¹⁾ HAUSDORFF, S. 155.

¹²⁾ Das heißt L_B ist zusammenhängend und offen in L .

Wir haben den Zwischenwertnäherungssatz nur für reelle Funktionen ausgesprochen und bewiesen. Mit Hilfe der Grenzdistanz können wir einen entsprechenden Satz für Funktionen mit kompakten metrischen Wertmengen beweisen. Der Einfachheit halber wollen wir diesen Satz nur für engere Voraussetzungen aussprechen und beweisen.

SATZ 7. *Ist $f|A$ eine ein- oder mehrdeutige Punktfunktion, deren Wertmenge eine metrische Punktmenge ist und ist f in jedem Anpunkte von A kompakt, gibt es ferner zu je zwei Punkten p_1 und p_2 von A eine p_1 und p_2 enthaltende, insichkompakte, rationale und zusammenhängende Teilmenge K der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A und eine Teilfunktion $f|B$ von $f|A$, so daß $K \subseteq \bar{B}$ ist und für welche in jedem Punkte $x \in K$ $i[H(f|B; x)] \leq j$ ist, so ist $i[W(f|A)] \leq j$.*

BEWEIS. Wir zeigen, daß für jedes $\sigma > 0$ je zwei verschiedene Punkte w_1 und w_2 der Wertmenge $W = W(f|A)$ durch eine $(j + \sigma)$ -Kette in W verbunden sind. Ist $w_1 = f(p_1)$ und $w_2 = f(p_2)$, so gibt es nach den Voraussetzungen des Satzes eine insichkompakte, rationale und zusammenhängende Menge K , welche p_1 und p_2 enthält. Ist $f|B$ die im Satze näher erklärte Teilfunktion von $f|A$, so können wir nach dem Zusatze zum Satz 4 jedem Punkte x aus K eine Umgebung U_x so zuordnen, daß $i[W(f|BU_x)] < j + \sigma$ ist. Nach dem Borelschen Überdeckungssatze kann man nun endlich viele Punkte x_i aus K so wählen, daß die Vereinigungsmenge aller U_{x_i} die Menge K überdeckt. Da K zusammenhängend ist, kann man stets eine endliche Folge $U_1, U_2, \dots, U_n$ aus den U_{x_i} so auswählen, daß KU_iU_{i+1} für $i = 1, 2, \dots, n-1$ nicht leer ist und außerdem $p_1 \in U_1$ und $p_2 \in U_n$ ist. Ist $\bar{x}_i$ ein Punkt von KU_iU_{i+1} , so ist der Durchschnitt $W(f|BU_i)W(f|BU_{i+1})$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ nicht leer. Da $w_1 = f(p_1)$ und ein Funktionswert $f(\bar{x}_1)$ zu $W(f|BU_1)$ gehören, können w_1 und $f(\bar{x}_1)$ durch eine $(j + \sigma)$ -Kette in $W(f|BU_1)$ verbunden werden. Ebenso können $f(\bar{x}_1)$ und $f(\bar{x}_2)$ durch eine $(j + \sigma)$ -Kette in $W(f|BU_2)$ verbunden werden usw. Da die Anzahl der $\bar{x}_i$ endlich ist, können daher auch w_1 und w_2 in $W(f|B)$ und daher auch in $W(f|A)$ durch eine $(j + \sigma)$ -Kette verbunden werden. Nach der Erklärung der inneren Distanz ist daher $i[W(f|A)] \leq j$, w. z. b. w.

Auf die Untersuchung der Punktfunktion $\underline{\delta}(f|A; x)/\bar{A}$ und $\bar{\delta}(f|A; x)/\bar{A}$ auf der abgeschlossenen Hülle $\bar{A}$ von A hinsichtlich ihrer Eigenschaften gehen wir hier nicht näher ein. Man kann nun für diese Punktfunktionen wieder die untere und die obere Grenzdistanz bilden und auf diese Weise Grenzdistanzen zweiter Ordnung für die ursprüngliche Funktion $f|A$ erklären. Man kann auf diese Weise fortfahren und Grenzdistanzen höherer Ordnung von f bilden und versuchen, durch geeignete Grenzprozesse Grenzdistanzen transfiniten Ordnung zu bilden. Insbesondere wird dabei die Frage auftreten, wie weit dieser Prozeß der Bildung von Grenzdistanzen im allgemeinen, bzw. bei bestimmten Klassen von Funktionen fortgesetzt werden kann. Auf diese Frage, sowie auf weitere damit im Zusammenhang stehende Fragen kann ich derzeit jedoch nur hinweisen.

Andererseits kann man auch Grenzdistanzen bei Vernachlässigung von Teilmengen bilden.

Abschließend wollen wir noch einen Satz angeben, welcher für manche Anwendungen von Nutzen ist.

SATZ 8. Sind $f|A$ und $g|A$ reelle oder allgemeiner komplexe Punktfunktionen und ist f im Punkte $a \in A$ lokal beschränkt und g in a eindeutig, endlich und stetig, so ist $\delta(fg|A; a) = |g(a)| \delta(f|A; a)$ ¹³⁾. Sind $f|A$ und $g|A$ reelle Punktfunktionen und ist b ein Punkt, bzw. ein Schwachpunkt für A , ist ferner g in b eindeutig endlich und stetig und ist außerdem $g(b) \neq 0$, bzw. hat g in b einen von Null verschiedenen, endlichen und eindeutigen¹⁴⁾ (reduzierten) Grenzwert g^* , so ist $i[H(fg|A; b)] = |g(b)| \cdot i[H(f|A; b)]$, bzw. $i[H'(fg|A; b)] = |g^*| i[H'(f|A; b)]$.

Ist insbesondere bei diesen Voraussetzungen $H(f|A; b)$, bzw. $H'(f|A; b)$ ein Kontinuum im R_1^0 , so ist auch $H(fg|A; b)$, bzw. $H'(fg|A; b)$ ein Kontinuum im R_1^0 .

Auf den Beweis dieses Satzes soll der Kürze halber nicht mehr eingegangen werden.

¹³⁾ Ist $\underline{\delta}(f|A; a) = \overline{\delta}(f|A; a)$, so schreiben wir einfach $\delta(f|A; a)$.

¹⁴⁾ Das heißt es gibt genau eine Zahl g^* des R_1^0 , welche für die Funktion g in b die bekannte Grenzwerteigenschaft hat und nicht eine mehrelementige Menge aus dem R_1^0 .

Wien VII, Kaiserstr. 79/16

(Eingegangen am 30. Januar 1958)

Die Umkehrung einer Klasse singulärer Integrale

Herrn Prof. Dr. ROBERT SAUER zu seinem 60. Geburtstag
 am 16. September 1958 gewidmet

Von
 DIETRICH SUSCHOWK

In der linearen Theorie der stationären Überschallströmungen verwendet man zur Darstellung des „Störströmungspotentials“ Integrale der Wellengleichung

$$U_{tt}-U_{rr}-\frac{1}{r}U_r-\frac{1}{r^2}U_{\omega\omega}=0$$

von der Gestalt

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(t,r,\omega) = u^{(k)}(t,r) \left\{ \begin{array}{l} \sin k\omega \\ \cos k\omega \end{array} \right. = \int\limits_0^{t-r} \frac{T_k\left(\frac{t-\tau}{r}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}} f_k(\tau) d\tau \left\{ \begin{array}{l} \sin k\omega \\ \cos k\omega \end{array} \right. \\ (t-r \geq 0, \; r > 0; \; k = 0, 1, 2, \dots) \end{array} \right.$$

(vgl. [1], S. 54, Formel (99) und (100) sowie [3], S. 344, Formel (6)), wo

$$T_k(\lambda) = \tfrac{1}{2} [(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})^k + (\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})^k] \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

das k -te Tschebyscheffsche Polynom und $f_k(\lambda)$ eine mit im Endlichen überall eigentlich Riemann-integrierbarer zweiter Ableitung versehene reelle Funktion mit $f_k(0)=0$ ist. Die Funktionen $U(t,r,\omega)$ genügen auf dem charakteristischen Halbkegel $t^2-r^2=0, t\geq 0$ den Anfangsbedingungen

$$U=0, \quad U_t=0, \quad U_r=0, \quad U_\omega=0$$

und wachsen für $r\downarrow 0$ in bestimmter Weise (vgl. [3], Satz 3) über alle Grenzen. Die Bestimmung der „Singularitätendichten“ $f_k(\lambda)$ aus der vorgegebenen Beandung des Strömungsfeldes ist bei nicht ebenen oder nicht drehsymmetrischen Feldern einigermaßen kompliziert (vgl. z.B. [2]).

Hier soll gezeigt werden, daß sich die Funktionen $f(\lambda)$ nach geeigneter Umformung des in (1) auftretenden Integrals in einfacher Weise aus $u^{(k)}(t,r)$ bestimmen lassen.

Satz. Es sei für $t-r\geq 0, r>0$

$$u^{(k)}(t,r) = \int\limits_0^{t-r} \frac{T_k\left(\frac{t-\tau}{r}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-r^2}} f(\tau) d\tau \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

wo $T_k(\lambda)$ und $f(\lambda)$ die eingangs angegebenen Eigenschaften haben. Dann ist für $k=0$

$$f(t) = -\lim_{r\downarrow 0} r u_r^{(0)}(t,r) \quad (t\geq 0)$$

und für $k=1, 2, \dots$

$$f(t) = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \frac{d^k}{dt^k} \left[\lim_{r \downarrow 0} r^k u^{(k)}(t, r) \right] \quad (t \geq 0).$$

Wir beweisen die Behauptung zunächst für die Fälle $k=1, 2, \dots$. In [3], Satz 2 wurde gezeigt, daß $u^{(k)}(t, r)$ dann in die Gestalt

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} u^{(k)}(t, r) = & \frac{1}{2^k r^k} \int_0^{t-r} (t-\tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2})^k f'(\tau) d\tau - \\ & - \frac{r^k}{2^k} \int_0^{t-r} \frac{f'(\tau)}{(t-\tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2})^k} d\tau \end{aligned} \right.$$

gebracht werden kann. A.a.O. findet sich auch der Nachweis, daß für $r \downarrow 0$ der zweite Summand in (2) endlich bleibt. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir ihn hier:

Da $t-\tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}$ für $0 \leq \tau \leq t-r$ positiv ist, hat man nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung mit $0 < \vartheta < 1$

$$I_k(t, r) := \int_0^{t-r} \frac{f'(\tau)}{(t-\tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2})} d\tau = f'(\vartheta \cdot (t-r)) \int_0^{t-r} \frac{d\tau}{(t-\tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2})^k}.$$

Wegen $r \leq t-\tau + \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} \leq t + \sqrt{t^2 - r^2}$ ist

$$|I_k(t, r)| \leq |f'(\vartheta \cdot (t-r))| \int_0^{t-r} \frac{d\tau}{r^k} = \frac{t-r}{r^k} |f'(\vartheta \cdot (t-r))|,$$

woraus

$$r^{2k} |I_k(t, r)| \leq \frac{(t-r) r^k}{2^k} |f'(\vartheta \cdot (t-r))|$$

folgt. Man hat also

$$\lim_{r \downarrow 0} r^{2k} |I_k(t, r)| = 0.$$

Demnach ist

$$\lim_{r \downarrow 0} r^k u^{(k)}(t, r) = \frac{2^k}{2^k} \int_0^t (t-\tau)^k f'(\tau) d\tau.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht, abgesehen von einem Faktor, das k -te iterierte Integral von $f(\lambda)$. Demnach ist [mit $f(0)=0$]

$$\frac{d^k}{dt^k} \left[\lim_{r \downarrow 0} r^k u^{(k)}(t, r) \right] = 2^{k-1} (k-1)! f(t),$$

womit unsere Behauptung in den Fällen $k=1, 2, \dots$ bewiesen ist. Etwas anders verläuft der Beweis des Satzes für $k=0$:

Aus (1) ergibt sich nach Ausführung der Substitution $t-\tau=r\sigma$

$$u^{(0)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{f(t-r\sigma)}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} d\sigma$$

und unter Beachtung von $f(0) = 0$

$$-u_r^{(0)}(t, r) = \int_1^{t/r} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} f'(t - r\sigma) d\sigma,$$

oder nach Ausführung einer partiellen Integration

$$-u_r^{(0)}(t, r) = \frac{1}{r} \sqrt{t^2 - r^2} f'(0) + r \int_1^{t/r} \sqrt{\sigma^2 - 1} f''(t - r\sigma) d\sigma.$$

Führt man hier wieder $\tau = t - r\sigma$ als Integrationsvariable ein¹⁾, so erhält man nach Multiplikation mit r

$$-ru_r^{(0)}(t, r) = \sqrt{t^2 - r^2} f'(0) + \int_0^{t-r} \sqrt{(t-\tau)^2 - r^2} f''(\tau) d\tau$$

und

$$\begin{aligned} -\lim_{r \downarrow 0} ru_r^{(0)}(t, r) &= t f'(0) + \int_0^t (t - \tau) f''(\tau) d\tau \\ &= t f'(0) + (t - \tau) f'(\tau) \Big|_{\tau=0}^t + \int_0^t f'(\tau) d\tau \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz auch für $k=0$ bewiesen.

Wir wollen noch bemerken, daß die unter (1) stehenden Integrale auch für beliebige reelle Werte des Separationsparameters k Lösungen der Wellengleichung in Zylinderkoordinaten sind, denn bei dem in [3] für Satz 1 gegebenen Beweis wird nicht benutzt, daß k ganz ist. Wegen $u^{(k)}(t, r) = u^{(-k)}(t, r)$, eine Beziehung, die in (1) weniger deutlich wird, aus (2) hingegen sofort abgelesen werden kann, kann man k jedoch auf nichtnegative, reelle Werte beschränken. Die in diesen Fällen der zweiten der in dem obigen Satz angegebenen Umkehrformeln entsprechenden Beziehungen können unter Verwendung der bekannten Integraldarstellung für die Ableitung nichtganzer Ordnung sofort angeschrieben werden.

Literatur

- [1] SAUER, R.: Einführung in die theoretische Gasdynamik. Berlin 1951. —
 [2] SAUER, R.: Supersonic flow past slender bodies of arbitrary shape, ARDC Contract No. AF 61 (514)–1080, Technical note no. 1. München 1957. — [3] SUSCHOWK, D.: Lösungen des charakteristischen Anfangswertproblems der Wellengleichung usw. Math. Z. **68**, 340–361 (1958).

¹⁾ Man kann diese und die vorangehende Substitution vermeiden und die r -Differenziation an (1) direkt ausführen, wenn man die Hadamardschen „parties finies“ divergenter Integrale oder etwa die Theorie der Distributionen heranzieht. Wir glauben aber, hier auf diese Hilfsmittel verzichten zu können.

München, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

Über meromorphe Schnitte komplex-analytischer Vektorraumbündel und Anwendungen auf Riemannsche Klassen. I

Von

HANS-JOACHIM NASTOLD

Einleitung

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Teile. Im ersten Teil (§ 1 und § 2) wird am Beispiel der in engem Zusammenhang mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen auf Riemannschen Flächen stehenden Riemannschen Funktionssysteme — das sind gewisse auf der universellen Überlagerungsfläche einer punktierten Riemannschen Fläche meromorphe Funktionenvektoren, die bei Anwendung einer Deckbewegung sich mit einer konstanten, zu einem vorgegebenen Homomorphismus der Deckbewegungsgruppe in die lineare Gruppe gehörenden Matrix multiplizieren — dargelegt, wie Fragen der klassischen Funktionentheorie sich entsprechenden Fragen über komplex-analytische Vektorraumbündel unterordnen lassen.

Schon verschiedentlich wurde ein Teil der Theorie der algebraischen Funktionen, man kann ihn den additiven Teil nennen, auf allgemeinere Klassen von Funktionen bzw. Funktionenvektoren übertragen. Stets sind dies Vektorräume über einem Körper K auf einer kompakten Riemannschen Fläche meromorpher Funktionen, und zu jeder solchen Klasse gibt es eine ihr in natürlicher Weise zugeordnete duale Klasse. Ferner ist für die Elemente dieser Klassen ein Holomorphiebegriff definiert. Dann gilt 1. ein Existenzsatz, der die Existenz hinreichend vieler über K linear unabhängiger Elemente der Klasse sicherstellt, 2. ein Endlichkeitssatz, der besagt, daß es nur endlich viele über dem Körper der komplexen Zahlen linear unabhängige überall holomorphe Elemente der Klasse gibt, 3. ein Riemann-Rochscher Satz, der die Anzahl linear unabhängiger holomorpher Elemente der einen Klasse mit der Anzahl linear unabhängiger holomorpher Differentiale der dualen Klasse in Beziehung setzt, 4. ein sog. inhomogener Riemann-Rochscher Satz, der angibt, unter welchen Bedingungen es zu vorgegebenen Hauptteilen Elemente der Klasse gibt. Bei näherer Betrachtung lassen sich nun die genannten Klassen als komplex-analytische Vektorraumbündel über kompakten Riemannschen Flächen, ihre Elemente als meromorphe Schnitte dieser Vektorraumbündel auffassen. 1. bis 4. gilt allgemein für solche Vektorraumbündel.

Die angeführten Aussagen lassen sich zum Teil verallgemeinern auf komplex-analytische Vektorraumbündel über kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten X beliebiger Dimension. So ist 1. enthalten in Ergebnissen von SERRE [12], falls X algebraisch ist. 2. wurde von CARTAN-SERRE [5], [4] und

3. von HIRZEBRUCH [6] für algebraisches X in allgemeiner Form bewiesen. Der 2. Teil dieser Arbeit möchte einen Beitrag zu 4. liefern. Er befaßt sich mit Schnitten komplex-analytischer Vektorraumbündel zu vorgegebenen Singularitäten. Die Methoden, die dabei zur Anwendung kommen, sind einmal die Garbentheorie und die Cohomologie mit Koeffizienten in Garben, dann die Theorie der harmonischen Integrale. Die letztere, von KODAIRA [7] auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten zur Konstruktion von harmonischen Formen mit gegebenen Singularitäten angewandt, kann als eine natürliche Verallgemeinerung der in H. WEYLS „Idee der Riemannschen Fläche“ dargelegten Methoden auf höhere Dimension angesehen werden. Wesentlich ist auch die Verwendung von Strömen (Courants im Sinne von DE RHAM und L. SCHWARTZ). — Aus diesen allgemeinen Sätzen erhält man schließlich im Fall der Dimension 1 mannigfaltige Existenzaussagen. Insbesondere ergibt sich hier der Existenzsatz 1. aus 2. und 4.

Im einzelnen knüpft § 1 an die klassische Theorie der Fuchsschen Differentialgleichungen — sogleich auf Riemannschen Flächen entwickelt — an und führt zu den Riemannschen Klassen, einem markanten Beispiel von Klassen obengenannter Art. § 2 diskutiert dann ausführlich die Unterordnung der Riemannschen Klassen unter die allgemeineren komplex-analytischen Vektorraumbündel. Anders als bei H. RÖHRL [10], wo dieselbe Frage behandelt wird, schließen wir das Vektorraumbündel über der in den Verzweigungspunkten punktierten Riemannschen Fläche unmittelbar zu einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W über der ganzen Fläche ab. Dies gelingt allein durch elementare lokale Betrachtungen, die an das bekannte Verhalten der Lösungsbasen von Differentialgleichungen in der Umgebung einer singulären Stelle der Differentialgleichung anknüpfen. So vermeidet man im eigentlich interessanten Fall einer kompakten Riemannschen Fläche die Heranziehung tieferliegender Resultate über Vektorraumbündel über nichtkompakten Flächen und erhält zudem auch in den Verzweigungspunkten eine vollständige Übersicht über die Zuordnung Riemannscher Funktionssysteme zu meromorphen Schnitten des Vektorraumbündels W . Interessiert man sich lediglich für den oben unter 1. genannten Existenzsatz, oder — was damit gleichbedeutend ist — für das Riemannsche Umkehrproblem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, so kann man sich nach dieser Zurückführung auf Sätze von SERRE ([12], Lemma 8, S. 24) berufen und ist damit fertig. Wir verschärfen im 2. Teil die Frage nach der Existenz hinreichend vieler meromorpher Schnitte zu der Frage nach solchen mit vorgegebenen Hauptteilen, die sogleich über kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension behandelt wird.

§ 1. Fuchssche Differentialgleichungen. Riemannsche Klassen

1.1. Differentialgleichungen auf Riemannschen Flächen

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen ist eine (kompakte oder nicht-kompakte) Riemannsche Fläche X . K sei der Körper der auf X meromorphen

Funktionen. Er enthält den Konstantenkörper C der komplexen Zahlen. Aus einer meromorphen Funktion $k \in K$ erhält man ein (auf X) meromorphes Differential dk , das sich in einer Umgebung U_x des Punktes $x \in X$ in einer Ortsuniformisierenden t in der Form $dk = \frac{dk}{dt} \cdot dt$ darstellen läßt. Alle meromorphen Differentiale auf X bilden einen Vektorraum über K der Dimension 1.

Eine *Differentiation* wird auf X durch ein festes meromorphes Differential ω definiert¹⁾: Ist f eine in einer offenen Menge $U \subset X$ meromorphe Funktion, so verstehen wir unter der Ableitung f' von f nach ω die Funktion $f' = \frac{df}{\omega}$. f' ist meromorph in U und drückt sich in einer Ortsuniformisierenden t in einer Umgebung U_x wie folgt aus: Mit $\omega = g(t) \cdot dt$, $g(t)$ meromorph, $df = \frac{df}{dt} \cdot dt$ in U_x ist $f' = \frac{df}{\omega} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{1}{g(t)}$ in U_x . f' ist — wie es sein muß — unabhängig von der Wahl der Ortsuniformisierenden t und unterscheidet sich in U_x von der Ableitung $\frac{df}{dt}$ nach derselben nur um den Faktor $\frac{1}{g(t)}$, der holomorph und $\neq 0$ ist an jeder Stelle, die weder Null- noch Polstelle von ω ist. Für die so definierte Differentiation gelten die üblichen Rechenregeln $(f+g)' = f' + g'$, $(c \cdot f)' = c \cdot f'$ für $c \in C$, $(f \cdot g)' = f \cdot g' + f' \cdot g$. Aus $f' = 0$ in einer offenen zusammenhängenden Menge $U \subset X$ folgt $f = c$, $c \in C$. f'' , f''' , ..., $f^{(q)}$ bezeichnet die 2-fach, 3-fach, ..., q -fach iterierte Ableitung von f .

Das Verschwinden der q -reihigen Wronskischen Determinante

$$W(f_1, f_2, \dots, f_q) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_q \\ f'_1 & f'_2 & \dots & f'_q \\ f''_1 & f''_2 & \dots & f''_q \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(q-1)} & f_2^{(q-1)} & \dots & f_q^{(q-1)} \end{vmatrix}$$

eines Systems von q meromorphen Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_q$ in einem offenen zusammenhängenden $U \subset X$ ist mit der linearen Abhängigkeit der $f_1, f_2, \dots, f_q$ über C gleichbedeutend.

Gegenstand unserer Untersuchungen sind zunächst *lineare, homogene Differentialgleichungen* q -ter Ordnung mit meromorphen Koeffizienten:

$$(1) \quad y^{(q)} + k_1 y^{(q-1)} + \dots + k_{q-1} y' + k_q y = 0, \quad k_1, \dots, k_q \in K.$$

Eine in einem offenen $U \subset X$ meromorphe Funktion f heißt *Lösung* von (1), wenn die nach obiger Definition gebildeten Ableitungen $f', f'', \dots, f^{(q)}$ von f in (1) eingesetzt, die Gleichung befriedigen.

¹⁾ Ist X als Riemannsche Fläche über der z -Kugel gegeben, so kann man nach dz differenzieren, d.h. man setzt dann $\omega = dz$; genauer gesagt: ω ist das (hier gleich bezeichnete) auf die Fläche X übertragene meromorphe Differential dz der z -Kugel.

An jeder Stelle $x \in X$ kann man in einer Ortsuniformisierenden t in einer Umgebung U_x (1) in die Form

$$(2) \quad \frac{d^q y}{dt^q} + l_1 \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} + \cdots + l_{q-1} \frac{dy}{dt} + l_q y = 0,$$

$l_1(t), \dots, l_q(t)$ meromorph in U_x , umschreiben. Die Stelle x heißt eine *reguläre Stelle* der Differentialgleichung (1), wenn die $l_1, \dots, l_q$ dort holomorph sind; andernfalls heißt x eine *singuläre Stelle* von (1). Diese Definitionen hängen offenbar nicht von der Wahl der Ortsuniformisierenden t in x ab.

Jede kompakte Teilmenge von X enthält nur endlich viele singuläre Stellen der Differentialgleichung (1). Sie werden mit a_λ , $\lambda \in A$ (abzählbar), bezeichnet. $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in A\}$ ist das *Regularitätsgebiet* von (1).

1.2. Lösungsbasen. Fuchssche Differentialgleichungen

Die Menge der Lösungen von (1) in einer einfach zusammenhängenden Umgebung $U_x \subset \bar{X}$ eines regulären Punktes $x \in \bar{X}$ bildet einen Vektorraum über C der Dimension q in U_x holomorpher Funktionen. Eine Basis desselben heißt eine *Lösungsbasis*. Wir fassen die q Funktionen $f^1, \dots, f^q$ einer solchen

zu einem *Vektor*²⁾ $\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^q \end{pmatrix}$ zusammen. Ein Vektor heiße meromorph, holo-

morph, längs eines Weges fortsetzbar usw., wenn entsprechendes für seine Komponenten gilt. $\mathfrak{f}$ sowie jede Lösung f von (1) in U_x ist längs beliebiger in x beginnender Wege w in $\bar{X}$ holomorph fortsetzbar, und $\mathfrak{f}$ bleibt dabei eine Lösungsbasis, f eine Lösung von (1). Fortsetzung von $\mathfrak{f}$ bzw. f längs eines geschlossenen, nicht nullhomotopen Weges w ergibt bei Rückkehr nach x im allgemeinen eine andere Lösungsbasis $\tilde{\mathfrak{f}}$ bzw. eine andere Lösung $\tilde{f}$ von (1). Da $\mathfrak{f}$ und $\tilde{\mathfrak{f}}$ aber beide Lösungsbasen von (1) in U_x darstellen, gilt

$$(3) \quad \tilde{\mathfrak{f}} = A_w \mathfrak{f} \text{ mit einer Matrix } A_w = (a_{\nu\mu}), \quad a_{\nu\mu} = \text{const}, \quad \det(a_{\nu\mu}) \neq 0.$$

A_w heißt die *Umlaufsubstitution von $\mathfrak{f}$ längs w* . Sie hängt nur von der Homotopieklasse $[w]$ des Weges w ab.

Wählt man einen festen Punkt $x_0 \in \bar{X}$, eine einfach zusammenhängende Umgebung $U_{x_0} \subset \bar{X}$ und eine Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ der Differentialgleichung (1) in U_{x_0} , so gehört nach (3) zu jeder Homotopieklasse $[w]$ von geschlossenen Wegen w in $\bar{X}$ mit Anfangs- und Endpunkt x_0 , also zu jedem Element der Wegegruppe $\pi_1(\bar{X}, x_0)$ von $\bar{X}$ zum Basispunkt x_0 , eine nichtsinguläre Matrix A_w . Fortsetzung von $\mathfrak{f}$ erst längs des Weges w_1 , danach längs des Weges w_2 liefert zuerst $\tilde{\mathfrak{f}} = A_{w_1} \mathfrak{f}$, sodann $\tilde{\tilde{\mathfrak{f}}} = A_{w_2} (A_{w_1} \mathfrak{f}) = (A_{w_2} A_{w_1}) \mathfrak{f}$. Mit $w_1 w_2$ als Produkt in der Wegegruppe hat man also $A_{w_1 w_2} = A_{w_2} A_{w_1}$, d.h. durch (3) wird ein Homomorphismus $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$ definiert. χ beschreibt die *Monodromiegruppe von $\mathfrak{f}$* , die man auch die *Monodromiegruppe der Differentialgleichung (1)*

²⁾ Vektoren schreiben wir im folgenden immer als Spaltenvektoren.

nennt [Wahl einer anderen Lösungsbasis von (1) in U_{x_0} ändert χ nur um einen inneren Automorphismus von $GL(q, C)$ ab].

Wir schränken die Menge der betrachteten Differentialgleichungen (1) ein, indem wir an ihre Lösungen in den singulären Stellen a_λ , $\lambda \in A$, eine Forderung stellen. Es sei f eine solche Lösung, $t(x)$ eine Ortsuniformisierende in einer Umgebung von a_λ mit $t(a_\lambda) = 0$, $\dot{U}$ eine in a_λ punktierte kleine Kreisscheibe (in t) um a_λ . f , im allgemeinen nicht eindeutig in $\dot{U}$, ist längs beliebiger Wege in $\dot{U}$ holomorph fortsetzbar, wird also zu einer auf der universellen Überlagerungsfläche $\hat{U}$ von $\dot{U}$ eindeutigen holomorphen Funktion. $\hat{U}$ wird beschrieben durch $t = \varrho \cdot e^{i\varphi}$, $-\infty < \varphi < +\infty$.

Def. 1. f verhält sich in a_λ bestimmt, wenn es für feste φ, ψ stets eine ganze Zahl m gibt mit $f(t)t^m \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ in $\varphi < \arg t < \psi$.

Bestimmt verhalten sich in a_λ die Funktionen t^α , $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\log t$, sowie jede in $\dot{U}$ eindeutige Funktion, die in a_λ höchstens einen Pol besitzt. Umgekehrt hat eine in $\dot{U}$ eindeutige meromorphe Funktion, die in a_λ bestimmt ist, höchstens einen Pol in a_λ , ist also meromorph in U_{a_λ} . Summe und Produkt in a_λ bestimmter Funktionen sind wieder bestimmt. Vgl. dazu [11].

Def. 2. Eine singuläre Stelle a_λ der Differentialgleichung (1) heißt *schwach singulär*, wenn sich alle ihre Lösungen in a_λ bestimmt verhalten. Differentialgleichungen, deren sämtliche singuläre Stellen a_λ , $\lambda \in A$, schwach singulär sind, heißen vom *Fuchsschen Typ*.

Wir beschränken uns im folgenden auf Fuchssche Differentialgleichungen. Die Eigenschaft einer singulären Stelle a_λ der Differentialgleichung (1), schwach singulär zu sein, läßt sich aus ihren Koeffizienten ablesen:

Satz 1 (FUCHS). Eine singuläre Stelle a_λ ist genau dann schwach singulär, wenn in einer Ortsuniformisierenden $t(x)$ in U_{a_λ} , $t(a_\lambda) = 0$, der μ -te Koeffizient $l_\mu(t)$ der umgeschriebenen Differentialgleichung (2) höchstens einen Pol μ -ter Ordnung in a_λ besitzt, (2) sich also in der Form

$$\frac{d^q y}{dt^q} + \frac{h_1}{t} \cdot \frac{d^{q-1} y}{dt^{q-1}} + \dots + \frac{h_\mu}{t^\mu} \cdot \frac{d^{q-\mu} y}{dt^{q-\mu}} + \dots + \frac{h_{q-1}}{t^{q-1}} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{h_q}{t^q} \cdot y = 0$$

mit in a_λ holomorphen $h_\mu(t)$ schreiben läßt. Vgl. [1], [11].

Wir stellen die Eigenschaften einer Lösungsbasis einer Fuchsschen Differentialgleichung zusammen. Wie oben sei $x_0 \in \bar{X}$, dem Regularitätsgebiet der Fuchsschen Differentialgleichung (1), mit einfach zusammenhängendem $U_{x_0} \subset \bar{X}$ und $\mathfrak{f}$ eine Lösungsbasis von (1). Dann gilt

1. $\mathfrak{f}$ ist ein holomorpher Vektor in U_{x_0} mit über C linear unabhängigen Komponenten.
2. $\mathfrak{f}$ ist längs beliebiger in x_0 beginnender Wege in $\bar{X}$ holomorph fortsetzbar.

3. Bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges w geht $\mathfrak{f}$ in $\tilde{\mathfrak{f}} = \chi(w)\mathfrak{f}$ über, wo χ die Monodromie von $\mathfrak{f}$, einen Homomorphismus von $\pi_1(\bar{X}, x_0)$ in $GL(q, C)$, darstellt.

4. $\mathfrak{f}$ verhält sich bestimmt an allen Stellen a_λ , $\lambda \in A$.

Ausgehend von der Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ mit den Komponenten $f^1, \dots, f^q$ kommt man wieder zur Differentialgleichung (1), indem man bildet

$$(4) \quad \frac{W(y, f^1, f^2, \dots, f^q)}{W(f^1, f^2, \dots, f^q)} = 0.$$

Entwicklung der Zählerdeterminante nach der ersten Spalte zeigt nämlich, daß (4) eine lineare homogene Differentialgleichung q -ter Ordnung darstellt, deren Koeffizienten längs beliebiger Wege in $\bar{X}$ meromorph fortsetzbar sind [als Quotienten holomorpher Funktionen; die $f^1, \dots, f^q$ sind in $\bar{X}$ holomorph fortsetzbar, $W(f^1, \dots, f^q) \neq 0$, da $f^1, \dots, f^q$ über C linear unabhängig]. Sie sind aber sogar eindeutig in $\bar{X}$, da bei Durchlaufen eines geschlossenen Weges w Zähler- und Nennerdeterminante jedes Koeffizienten die Determinante $\det(A_w) \neq 0$ der Umlaufsubstitution A_w aufnehmen. Bleibt noch zu zeigen, daß sie an jeder Stelle a_λ , $\lambda \in A$, sich bestimmt verhalten. Das gilt sicher von den Zähler- und Nennerdeterminanten als Summe von Produkten in a_λ bestimmter Funktionen $f^1, \dots, f^q$. Die Nennerdeterminante $W(f^1, \dots, f^q)$ multipliziert sich bei Umlauf längs eines Weges w in $\dot{U}$ um a_λ mit der Zahl $a = \det(A_w)$. Ebenso verhält sich die Funktion t^α mit $\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log a$, t wie oben Ortsuniformisierende in a_λ . $W(f^1, \dots, f^q) t^{-\alpha} = g$ ist also eindeutig in $\dot{U}$ und bestimmt in a_λ , also meromorph in U_{a_λ} . Folglich ist auch $\frac{1}{W(f^1, \dots, f^q)} = t^{-\alpha} \cdot \frac{1}{g}$ bestimmt in a_λ , und somit jeder Koeffizient meromorph in U_{a_λ} . Die Koeffizienten der Differentialgleichung (4) sind also meromorph in ganz X , also aus K . Sie besitzt $f^1, \dots, f^q$ als Lösungsbasis. Dadurch ist eine lineare, homogene Differentialgleichung eindeutig bestimmt, (4) stimmt also mit der ursprünglichen Differentialgleichung (1) überein.

Ist umgekehrt zu einem $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in A\}$ ein Vektor $\mathfrak{f}$ mit den Eigenschaften 1. bis 4. gegeben, so erhält man, wie wir eben sahen, in der Form (4) eine Fuchssche Differentialgleichung, die $\mathfrak{f}$ als Lösungsbasis besitzt. Diese kann allerdings außerhalb $\{a_\lambda; \lambda \in A\}$ noch weitere singuläre Stellen besitzen, nämlich dort, wo $W(f^1, \dots, f^q)$ verschwindet oder das feste Differential ω , nach welchem wir differenzieren, eine Pol- oder Nullstelle hat. Diese singulären Stellen sind insofern nicht wesentlich, als die Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ bei Umlauf um dieselben die Einsmatrix aufnimmt. Weitere solche nicht wesentlich singulären Stellen der zugehörigen Differentialgleichung (4) außerhalb $\{a_\lambda; \lambda \in A\}$ können entstehen, wenn man bei den Forderungen an den Vektor $\mathfrak{f}$ in 1. und 2. jeweils „holomorph“ durch „meromorph“ ersetzt. Sämtliche solche singulären Stellen der Differentialgleichung (4) sind jedoch schwach singulär, da $\mathfrak{f}$ dort in einer Umgebung eindeutig und meromorph ist. Mit

Def. 3. Eine singuläre Stelle a_λ einer Fuchsschen Differentialgleichung (1) heißt *wesentlich*, wenn nicht alle ihre Lösungen in einer punktierten Umgebung U_{a_λ} eindeutig sind,

können wir also zusammenfassend formulieren

Satz 2. Gegeben sei eine Fuchssche Differentialgleichung (1) auf X . $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sei eine Menge mit den Eigenschaften: a) Jede wesentlich singuläre Stelle von (1) ist ein a_λ . b) Jede kompakte Teilmenge von X enthält nur endlich viele a_λ . Ist $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ und $x_0 \in \bar{X}$ mit einfach zusammenhängendem $U_{x_0} \subset \bar{X}$, dann hat jede Lösungsbasis $\mathfrak{f}$ von (1) die Eigenschaften

1. $\mathfrak{f}$ ist ein meromorpher Vektor in U_{x_0} mit über C linear unabhängigen Komponenten.

2. $\mathfrak{f}$ ist längs beliebiger in x_0 beginnender Wege in $\bar{X}$ meromorph fortsetzbar.

3. Es gibt einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$, so daß bei Fortsetzung längs eines geschlossenen Weges $w \in \pi_1(\bar{X}, x_0)$ $\mathfrak{f}$ in $\tilde{\mathfrak{f}} = \chi(w) \mathfrak{f}$ übergeht.

4. $\mathfrak{f}$ verhält sich bestimmt an allen Stellen a_λ , $\lambda \in \Lambda$.

Umgekehrt gilt

Satz 3. Ist auf einer Riemannschen Fläche X eine Menge $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset X$ gegeben, so daß jede kompakte Teilmenge von X nur endlich viele a_λ enthält, ist ferner für $x_0 \in \bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ ein Homomorphismus $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$ gegeben, so gehört zu jedem Vektor $\mathfrak{f}$ mit den Eigenschaften 1. bis 4. eine (eindeutig bestimmte) Fuchssche Differentialgleichung (1) auf X , die $\mathfrak{f}$ als Lösungsbasis mit der Monodromie χ besitzt und deren wesentlich singuläre Stellen in $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ enthalten sind.

Frage (Umkehrproblem): Gibt es Fuchssche Differentialgleichungen auf X mit vorgegebener Menge $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ und vorgegebener Monodromie $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$? Nach Satz 3 können wir statt dessen auch nach einem Vektor $\mathfrak{f}$ mit 1. bis 4. fragen.

Über Fuchssche Differentialgleichungen vgl. man [I], [II].

1.3. Riemannsche Klassen

Wichtige Eigenschaften Fuchsscher Differentialgleichungen hängen nur von der Monodromiegruppe ab, so z.B. die elementare Auflösbarkeit und die Reduzibilität. Man hat daher Fuchssche Differentialgleichungen mit derselben Monodromiegruppe zu Klassen zusammengefaßt. Nach den Sätzen 2 und 3 wird man zweckmäßig die Lösungsbasen, also Vektoren mit gewissen Eigenschaften, zu Klassen zusammenfassen. Wie sich sogleich zeigen wird, ist es sinnvoll, dabei die Forderung unter Punkt 1. in Satz 2 an $\mathfrak{f}$, über C linear unabhängige Komponenten zu besitzen, fallen zu lassen.

Def. 4. Auf einer Riemannschen Fläche X sei eine Menge $\{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\} \subset X$ und ein Homomorphismus χ wie in Satz 3 gegeben. Durch diese Daten wird

eine *Riemannsche Klasse* R definiert. Ein Vektor f gehört genau dann zu R , wenn f mit dem gegebenen χ die Eigenschaften 1. bis 4. in Satz 2 besitzt mit Ausnahme der Forderung in 1.: f soll über C linear unabhängige Komponenten besitzen.

Die a_λ , $\lambda \in A$, heißen die *Verzweigungspunkte*, χ heißt die *Monodromie* der Klasse R .

Satz 4. Die Vektoren einer Riemannschen Klasse R bilden einen Vektorraum über K . Genau diejenigen $f \in R$, deren Komponenten über C linear unabhängig sind, sind die Lösungsbasen der Fuchsschen Differentialgleichungen mit der Monodromie χ .

Bemerkung. Hätte man nur die letzteren in die Klasse R aufgenommen, so wäre R kein Vektorraum über K geworden.

Wichtige Sonderfälle Riemannscher Klassen sind die *algebraischen Klassen*. Diese entsprechen den relativ zu X verzweigten, unbegrenzten und endlich-blättrigen Überlagerungsflächen X' von X . Die Verzweigungspunkte von X' über X ergeben die Verzweigungspunkte der entsprechenden Klasse R , der Homomorphismus $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$ (X' sei q -blättrig über X) ergibt sich aus der Vertauschung der Blätter über x_0 , die zu einem Weg $w \in \pi_1(\bar{X}, x_0)$ gehört. Die $\chi(w) \in GL(q, C)$ sind Vertauschungsmatrizen: Jede Zeile und jede Spalte enthält genau eine Eins, sonst lauter Nullen. Man kann dann einen K -Isomorphismus stiften zwischen dem Körper K' der auf X' meromorphen Funktionen, aufgefaßt als Vektorraum über K , und der Klasse R : Einer Funktion auf X' werden ihre q , den q Blättern von X' über X entsprechenden Zweige über X als Komponenten eines Vektors von R zugeordnet.

Neben den *Funktionen* einer Klasse R — so wollen wir im folgenden die Vektoren $f \in R$, deren Komponenten ja meromorphe Funktionen sind, nennen — interessieren die *Differentiale* von R . Ein *Differential* $d \in R$ ist ein Vektor, dessen q Komponenten meromorphe Differentiale sind: $d = \begin{pmatrix} \delta^1 \\ \vdots \\ \delta^q \end{pmatrix}$, mit den ent-

sprechenden Eigenschaften, wie sie in Def. 3 für Funktionen gefordert werden (Def. 1 des bestimmten Verhaltens an einer Stelle a_λ läßt sich unverändert für Differentiale übernehmen).

Satz 5. Die Differentiale einer Riemannschen Klasse R bilden einen Vektorraum über K . Man erhält ein $d \in R$, indem man ein $f \in R$ (komponentenweise) mit einem auf X meromorphen Differential π multipliziert.

Im Falle einer algebraischen Klasse R ist der Vektorraum über K der meromorphen Differentiale auf X' wieder K -isomorph dem Vektorraum der Differentiale von R vermöge der entsprechenden Zuordnung wie oben für Funktionen.

Der Riemannschen Klasse R stellt man die *duale Klasse* R^* zur Seite. R und R^* haben dieselben Verzweigungspunkte $\{a_\lambda; \lambda \in A\}$. Ist $\chi_R: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow$

$GL(q, C)$ die Monodromie von R , so ist die Monodromie χ_{R^*} von R^* folgendermaßen definiert:

$$\chi_{R^*}(w) = {}^t(\chi_R(w))^{-1} = (\chi_R(w))^*. {}^3)$$

Zwischen R und R^* kann man ein Produkt erklären: Für $\mathfrak{f} \in R$, $\mathfrak{f}^* \in R^*$ setzt man $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^* = {}^t \mathfrak{f} \mathfrak{f}^*$. $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ ist längs beliebiger Wege in $\bar{X}$ meromorph fortsetzbar. Bei Durchlaufen eines geschlossenen Weges $w \in \pi_1(\bar{X}, x_0)$ geht $\mathfrak{f}$ in $\tilde{\mathfrak{f}} = \chi_R(w) \mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}^*$ in $\tilde{\mathfrak{f}}^* = \chi_{R^*}(w) \mathfrak{f}^*$ über, also $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ in $\tilde{\mathfrak{f}} \wedge \tilde{\mathfrak{f}}^* = {}^t \tilde{\mathfrak{f}} \tilde{\mathfrak{f}}^* = {}^t (\chi_R(w)) \chi_{R^*}(w) \mathfrak{f}^* = {}^t \mathfrak{f} \mathfrak{f}^* = \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$. $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ ist also auf $\bar{X}$ eindeutig und, weil in den Verzweigungspunkten bestimmt, dort ebenfalls meromorph: $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^*$ ist meromorph auf X , also $\mathfrak{f} \wedge \mathfrak{f}^* \in K$. — Die duale Klasse einer algebraischen Klasse stimmt mit dieser überein.

Die speziellen algebraischen Klassen legen es nahe, allgemein die Riemannschen Klassen als Verallgemeinerung der Körper auf einer Riemannschen Fläche meromorpher Funktionen anzusehen, und demgemäß auf diese gewisse Fragestellungen und Sätze der Funktionentheorie zu übertragen. Da man in den Klassen nur addieren kann, wird es sich im wesentlichen um die additiven Aussagen handeln. Dies hat R. KÖNIG im Falle Riemannscher Klassen über der z -Kugel in einer Reihe von Arbeiten geleistet. (Vgl. dazu z. B. [8].) Im nächsten Paragraphen werden wir die Riemannschen Klassen in natürlicher Weise einem allgemeineren Begriff unterordnen, für den entsprechende Fragestellungen sinnvoll sind. Aussagen über Riemannsche Klassen erhält man dann durch Spezialisierung. Insbesondere ergibt sich dabei auch der *Existenzsatz*, der unter Berufung auf J. PLEMELJ in den älteren Arbeiten immer vorausgesetzt wurde (vgl. die Fußnote in [15] auf S. 134). Er besagt, daß der Vektorraum der Funktionen einer beliebigen Klasse R , also für beliebig vorgegebene $\{a_\lambda; \lambda \in A\}$, $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$, über K die Dimension q besitzt.

Über Riemannsche Klassen vgl. man [8].

§ 2. Vektorraumbündel

2.1. Vorbemerkungen

Im folgenden wird jeder Riemannschen Klasse R über X ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über X zugeordnet, so daß die Vektorräume über K der Funktionen aus R und der meromorphen Schnitte von W isomorph sind. W erhält man folgendermaßen: Zunächst entspricht R auf natürliche Weise ein Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in A\}$ mit konstanten Koordinatentransformationen. $\bar{W}$ wird dann passend zu einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W über X abgeschlossen.

Die Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X}$ mit *konstanten Koordinatentransformationen* sind sämtlich assoziiert zu der universellen Überlagerungsfläche $\hat{X}$ von $\bar{X}$, aufgefaßt als Hauptfaserbündel. Letztere einzuführen legen schon die

³⁾ Wir setzen für eine Matrix A ${}^t(A^{-1}) = A^*$; ${}^t A$ transponierte Matrix.

Lösungen der Differentialgleichungen in § 1 und die Riemannschen Klassen R nahe. Die dort betrachteten Funktionen und Differentiale werden nämlich auf $\hat{X}$ erst eindeutig.

Ausgehend von einem festen $x_0 \in \bar{X}$ erhält man $H_{x_0} = \hat{X}$ als Menge der Homotopieklassen von Wegen in $\bar{X}$ mit Anfangspunkt x_0 :

$$H_{x_0} = \{[w]; w = \text{Weg in } \bar{X}, w(0) = x_0\},$$

$[w]$ = Homotopieklasse von w . H_{x_0} wird in bekannter Weise mit einer Topologie versehen. Die Wegegruppe $G = \pi_1(\bar{X}, x_0)$ soll von rechts auf H_{x_0} operieren. Die Produktdefinition für Wege (vw bedeutet: erst wird der Weg v , dann der Weg w durchlaufen) macht es notwendig, zu definieren

$$(1) \quad [w] \cdot s = [s^{-1}w], \quad [w] \in H_{x_0}, \quad [s^{-1}w] \in H_{x_0}, \quad s \in G.$$

Dann operiert die mit der diskreten Topologie versehene topologische Gruppe G von rechts auf dem topologischen Raum H_{x_0} , d. h. die Abbildung $([w], s) \rightarrow [w] \cdot s$ von $H_{x_0} \times G \rightarrow H_{x_0}$ ist stetig, und es gilt

$$([w] \cdot s) \cdot t = [w] \cdot (st) \quad \text{für } [w] \in H_{x_0}, \quad s, t \in G,$$

$$[w] \cdot e = [w] \quad \text{für das Einselement } e \in G.$$

Dadurch wird H_{x_0} zu einem *Hauptfaserraum* im Sinne von [3], exp. VI, 4. Durch das auf H_{x_0} operierende G wird eine Äquivalenzrelation auf H_{x_0} definiert. Die Klassen nach dieser Relation sind die *Fasern* von H_{x_0} . Sie sind sämtlich homöomorph G . Der Quotientenraum H_{x_0}/G ist homöomorph $\bar{X}$. Dieser Homöomorphismus wird induziert durch die *Projektion* $q: H_{x_0} \rightarrow \bar{X}$, die $[w] \in H_{x_0}$ seinen Endpunkt zuordnet: $q([w]) = w(1)$. Jedes $s \in G$ definiert einen Homöomorphismus s von H_{x_0} auf sich, $s: [w] \rightarrow [w] \cdot s$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_{x_0} & \xrightarrow{s} & H_{x_0} \\ q \searrow & & \swarrow q \\ & \bar{X} & \end{array}$$

kommutativ ist. G läßt sich also als Gruppe der *Deckbewegungen* von $\hat{X}$ über $\bar{X}$ auffassen. Wahl eines anderen Basispunktes $x_1 \in \bar{X}$ ergibt einen anderen Hauptfaserraum H_{x_1} . H_{x_0} und H_{x_1} sind aber $\bar{X}$ -isomorph im Sinne von [3], exp. VI, 2.

Der Hauptfaserraum H_{x_0} mit der Basis $\bar{X}$ und der Strukturgruppe G ist *lokal trivial* im Sinne von [3], exp. VI, 4. Dazu sei $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ eine Überdeckung der Basis $\bar{X}$ durch offene, *einfach zusammenhängende* U_i , so daß $U_i \cap U_j$ zusammenhängend ist für alle $i, j \in J$. Zu jedem U_i wählt man nun einen Punkt $x_i \in U_i$ und einen Weg s_i von x_0 nach x_i . Für $u \in U_i$ sei $t_i(u)$ ein Weg von x_i nach u in U_i . Die Homotopieklasse $[t_i(u)]$ ist durch u eindeutig bestimmt. Wir definieren nun folgende eineindeutige Abbildung von

$U_i \times G$ auf $\bar{q}^1(U_i) \subset H_{x_0} : (u, g_i) \rightarrow [g_i^{-1} s_i t_i(u)]$. Dadurch wird ein U_i -Isomorphismus des trivialen Hauptfaserraumes $U_i \times G$ mit der Operation $(u, g_i) \cdot s = (u, g_i s)$, $s \in G$, der Gruppe G auf $U_i \times G$ auf den über U_i durch H_{x_0} induzierten Hauptfaserraum $\bar{q}^1(U_i)$ gegeben. H_{x_0} ist somit lokal trivial.

Man kann sich H_{x_0} aus den einzelnen jeweils $\bar{q}^1(U_i)$ U_i -isomorphen Bestandteilen $U_i \times G$ aufgebaut denken. Dazu hat man nur anzugeben, welche Punkte über $u \in U_i \cap U_j$ von $U_i \times G$ und $U_j \times G$ demselben Punkt von H_{x_0} entsprechen. Man hat $(u, g_i) \rightarrow [g_i^{-1} s_i t_i(u)]$, $(u, g_j) \rightarrow [g_j^{-1} s_j t_j(u)]$ für $u \in U_i \cap U_j$ und erhält aus $[g_i^{-1} s_i t_i(u)] = [g_j^{-1} s_j t_j(u)]$ folgende Beziehung zwischen g_i und g_j :

$$[g_i] = [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}] [g_j]$$

oder

$$(2) \quad [g_i] = g_{ij}(u) [g_j] \quad \text{mit} \quad g_{ij}(u) = [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}] \in G.$$

Die Koordinatentransformationen $g_{ij}(u) : U_i \cap U_j \rightarrow G$ sind stets stetig, hier konstant und erfüllen die Verträglichkeitsbedingung

$$(3) \quad g_{ij}(u) g_{jk}(u) = g_{ik}(u) \quad \text{für } u \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Operiert die (topologische) Gruppe G von links auf einem topologischen Raum F , so erhält man zum Hauptfaserraum H mit der Strukturgruppe G einen Faserraum E mit der Strukturgruppe G und der Faser F über derselben Basis B , indem man das kartesische Produkt $H \times F$ bildet und zum Quotientenraum $H \times F = E$ von $H \times F$ nach der von rechts vermöge

$$(4) \quad (x, y) \cdot s = (x \cdot s, s^{-1} \cdot y) \quad \text{für } x \in H, y \in F, s \in G$$

auf $H \times F$ operierenden Gruppe G übergeht. E ist der zum Hauptfaserraum H (und dem Operieren von G auf F) assoziierte Faserraum und die Struktur des Faserraumes E mit der Strukturgruppe G wird definiert durch die stetigen Abbildungen: $H \times F \rightarrow H \times F = E$ und $p : E \rightarrow B$, die Projektion auf die Basis.

Vgl. dazu [3], exp. VI, 6.

Für lokal triviale Faserräume — da wir es im folgenden nur mit solchen zu tun haben, verstehen wir von jetzt ab unter einem Faserraum stets einen lokal trivialen — gibt es wieder eine Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ der Basis B durch offene U_i , so daß die durch E über U_i induzierten Faserräume $\bar{p}^1(U_i)$ mit der Strukturgruppe G U_i -isomorph den trivialen Faserräumen $U_i \times F$ sind. Die U_i -Isomorphismen $\bar{q}_i^1 : U_i \times F \rightarrow \bar{p}^1(U_i)$ heißen lokale Karten von E . Die zugehörigen Koordinatentransformationen $g_{ij}(u) : U_i \cap U_j \rightarrow G$ sind dieselben wie diejenigen des Hauptfaserraumes H und bestimmen den Faserraum E eindeutig. Man erhält E , indem man in der topologischen Summe der $\{U_i \times F\}_{i \in J}$ gemäß den g_{ij} über $U_i \cap U_j$ identifiziert. Faserräume E über der Basis B mit der Strukturgruppe G , die auf der Faser F von links operiert, werden daher oft gegeben durch eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ von B und Koordinatentransformationen, also stetigen Abbildungen $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$, die (3) erfüllen. Vgl. [3], exp. VI, 6, [6], § 3 und [13].

Für uns wichtig sind weniger die eben betrachteten stetigen Faserräume als *komplex-analytische Faserräume* oder *Faserbündel*. Man hat dazu nur jeweils „topologischer Raum“ durch „komplex-analytische Mannigfaltigkeit“, „stetig“ durch „holomorph“ und „topologische Gruppe“ durch „(komplexe) Liesche Gruppe“ zu ersetzen. *Strukturgruppe* ist meist die *lineare Gruppe* $GL(q, C)$, die von links auf der Faser C^q (Vektorraum über C der Dimension q ; Vektoren als Spaltenvektoren geschrieben) bzw. $GL(q, C)$ durch *Linksmultiplikation* mit den Matrizen aus $GL(q, C)$ operiert. Im Falle $F = C^q$ spricht man von *Vektorraumbündeln*. Vgl. dazu [6], S. 48ff.

Ein Schnitt s des Faserbündels E , eine stetige (holomorphe) Abbildung $s: B \rightarrow E$ mit $p \circ s = 1$ (Identität), wird in den lokalen Karten $\bar{\varphi}_i^1: U_i \times F \rightarrow \bar{p}^1(U_i)$ zur Überdeckung $\Pi = \{U_i\}_{i \in J}$, also in einem Atlas der Faserstruktur von E , gegeben durch stetige (holomorphe) Abbildungen

$$(5) \quad s_i: U_i \rightarrow F \quad \text{mit} \quad s_i(u) = g_{ij}(u) \cdot s_j(u) \quad \text{für } u \in U_i \cap U_j.$$

Man erhält $s_i(u)$ aus $\varphi_i(s(u)) = (u, s_i(u)) \in U_i \times F$. Für $F = C^q$ ist $s_i(u): U_i \rightarrow F$ ein *holomorpher Vektor* in U_i . Entsprechend definieren wir nun in diesem Fall:

Def. 1. Ein *meromorpher Schnitt* eines komplex-analytischen Vektorraumbündels W wird in einem Atlas von W gegeben durch meromorphe Vektoren $m_i(u)$ in U_i , $i \in J$, mit $m_i(u) = g_{ij}(u) m_j(u)$ für $u \in U_i \cap U_j$, $g_{ij}(u) \in GL(q, C)$.

Satz 1. Für einen zum Hauptfaserraum H assoziierten Faserraum E mit der Strukturgruppe G , die von links auf der Faser F operiert, gilt: Die stetigen (holomorphen) Schnitte von E entsprechen eineindeutig den stetigen (holomorphen) Abbildungen f von H in F mit

$$(6) \quad f(x \cdot s) = s^{-1} \cdot f(x), \quad x \in H, s \in G.$$

Im Falle eines Vektorraumbündels W mit $F = C^q$ ist f wieder ein *holomorpher Vektor* auf H mit (6), und es gilt entsprechend: Die meromorphen Schnitte von W entsprechen eineindeutig den meromorphen Vektoren f auf H mit (6).

Siehe [3], exp. VII. — Die Schnitte eines Vektorraumbündels lassen sich addieren und mit Konstanten aus C multiplizieren. Sie bilden einen Vektorraum über C .

2.2. Riemannsche Klassen und Vektorraumbündel über $\bar{X}$

Nach diesen Vorbereitungen soll zunächst noch einmal kurz auf die in §1 betrachteten Fuchsschen Differentialgleichungen (1) eingegangen werden. Mit $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ bildet man wie in 2.1 $\hat{\bar{X}} = H_{x_0}$, $x_0 \in \bar{X}$. $\hat{\bar{X}}$ ist eine Riemannsche Fläche (komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension 1) und $G = \pi_1(\bar{X}, x_0)$ operiert von rechts als Gruppe analytischer Homöomorphismen auf $\hat{\bar{X}}$. Die Projektion $q: \hat{\bar{X}} \rightarrow \bar{X}$ ist holomorph und lokal homöomorph. In $\bar{X}$ meromorphe Funktionen und Differentiale besitzen ein reziprokes Bild bezüglich q auf $\hat{\bar{X}}$: $\bar{q}^1(f)(\hat{x}) = f \circ q(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{\bar{X}}$. Wird auf X nach dem festen Differential ω differenziert, so soll auf $\hat{\bar{X}}$ nach $\bar{q}^1(\omega)$ differenziert werden. Der

Differentialgleichung (1) auf X entspricht die Differentialgleichung

$$(1) \quad y^{(q)} + \bar{q}^1(k_1) y^{(q-1)} + \dots + \bar{q}^1(k_{q-1}) y' + \bar{q}^1(k_q) y = 0 \quad \text{auf } \hat{X},$$

die dort keine wesentlich singuläre Stelle besitzt. Eine Lösung von (1) ist eine auf $\hat{X}$ eindeutige meromorphe Funktion f , die auf $\hat{X}$ (1) erfüllt. Die sämtlichen Lösungen bilden einen Vektorraum L über C der Dimension q . Ist (1) eine Fuchssche Differentialgleichung, so ist $L \subset \hat{K}$, dem Ring der meromorphen Funktionen auf $\hat{X}$, die sich in a_λ , $\lambda \in A$, bestimmt verhalten. Die analytischen Homöomorphismen $s: \hat{x} \rightarrow \hat{x} \cdot s$, $\hat{x} \in \hat{X}$, $s \in G$, induzieren Automorphismen von $\hat{K}$: Wir definieren das direkte (im Gegensatz zum reziproken) Bild $(f)s$ der auf X meromorphen Funktion f bezüglich s

$$(7) \quad (f)s(\hat{x}) = f \circ s^{-1}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \hat{X}, \quad s \in G.$$

G operiert von rechts auf $\hat{K}$: $(f)st(\hat{x}) = f \circ (st)^{-1}(\hat{x}) = f \circ (t^{-1}s^{-1})(\hat{x}) = f(\hat{x} \cdot t^{-1}s^{-1}) = f((\hat{x} \cdot t^{-1}) \cdot s^{-1}) = f \circ s^{-1}(\hat{x} \cdot t^{-1}) = (f \circ s^{-1}) \circ t^{-1}(\hat{x}) = ((f)s)t(\hat{x})$. Fixring der Automorphismengruppe G von $\hat{K}$ ist $\bar{q}^1(K) \cong K$. Anwendung von $s \in G$ in der beschriebenen Weise auf ein $f \in L$ ergibt $(f)s \in L$, da die Koeffizienten von (1) bei s fest bleiben. s induziert also einen C -Automorphismus von L . Die dadurch erhaltene *Rechtsdarstellung* der Deckbewegungsgruppe G von $\hat{X}$ über $\bar{X}$ im Lösungsraum L von (1) ist die invariante Fassung der *Monodromie* von (1). Auszeichnung einer Basis $\mathfrak{f}$ von L führt zu einem Homomorphismus $\chi: G = \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$ vermöge

$$(8) \quad (\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}.$$

Es ist gerade der in 1.2 $\mathfrak{f}$ zugeordnete: Sei dazu $\hat{x}_0$ der über $x_0 \in \bar{X}$ liegende, dem Nullweg entsprechende Punkt von $\hat{X} = H_{x_0}$. Dann ist nach (7)

$$(\mathfrak{f})s(\hat{x}_0) = f \circ s^{-1}(\hat{x}_0) = \mathfrak{f}(\hat{x}_0 \cdot s^{-1}) = \mathfrak{f}([s]), \quad s \in \pi_1(\bar{X}, x_0) \quad [\text{vgl. 2.1 (1)}],$$

also mit (8) $\mathfrak{f}([s]) = \chi(s)\mathfrak{f}(\hat{x}_0)$. — Entsprechend betrachtet man auf Riemannschen Flächen X Systeme von n linearen homogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung für n Funktionen, die sich bequem mit Differentialformen schreiben lassen. Vgl. dazu [10], 1. Eine Lösung ist hier ein Vektor, eine Lösungsbasis eine Matrix vom Typ (n, n) . Letztere gibt wieder zur Definition einer Monodromie Anlaß. Man beschränkt sich ebenso auf Systeme mit lauter schwach singulären Stellen, hat hier aber für schwache Singularität kein so einfaches Kriterium in den Koeffizienten wie Satz 1, § 1 [I]. Das Umkehrproblem (vgl. 1.2), also die Frage nach einem Fuchsschen System mit vorgegebenen $\{a_\lambda; \lambda \in A\}$ und vorgegebener Monodromie $\chi: \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$, $x_0 \in \bar{X}$, ist hier gleichbedeutend mit der Suche nach einer meromorphen nicht singulären Matrix $\mathfrak{F}$ ($\det(\mathfrak{F}) \neq 0$) auf $\hat{X}$, die sich in a_λ , $\lambda \in A$, bestimmt verhält, also einer nicht singulären Matrix $\mathfrak{F}$ von Elementen aus $\hat{K}$, mit $(\mathfrak{F})s = \chi(s)\mathfrak{F}$, $s \in G$.

Für Riemannsche Klassen R mit Verzweigungspunkten $\{a_\lambda; \lambda \in A\}$ und Monodromie $\chi: G \rightarrow GL(q, C)$, G Deckbewegungsgruppe von $\hat{X}$ über $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in A\}$, erhält man hier folgende, von x_0 unabhängige

Def. 2. Eine Funktion $f \in R$ ist ein Vektor mit Komponenten aus $\hat{K}$, der

$$(9) \quad (f)s = \chi(s)f, \quad s \in G$$

erfüllt.

Entsprechend lautet die Definition für Differentiale $db \in R$. Nach 1.3 verschiedene Riemannsche Klassen können hier zur selben Klasse führen. Man nennt solche zweckmäßig isomorph.

Wir ordnen der so definierten Klasse R ein Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X}$ zu: Dazu fassen wir $\hat{X}$ mit der von rechts auf X operierenden Gruppe G als Hauptfaserraum H über der Basis $\bar{X}$ auf. Vermöge der Monodromie $\chi: G \rightarrow GL(q, C)$ operiert G von links auf der Faser $F = C^q$:

$$(10) \quad s \cdot f = \chi(s)f, \quad s \in G, f \in C^q, \text{ Spaltenvektor.}$$

Nach 2.1 erhält man durch Quotientenbildung aus $H \times F$ unmittelbar das H assoziierte komplex-analytische Vektorraumbündel $H \times_G F = \bar{W}$. Für einen zu

einer Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ gehörigen in 2.1 angegebenen Atlas für H_{x_0} wurden dort die Koordinatentransformationen (3) $g_{ij}(u) = [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}] \in G = \pi_1(\bar{X}, x_0)$, $u \in U_i \cap U_j$ bestimmt, $g_{ij}(u) = \text{const.}$ Daraus erhält man die Koordinatentransformationen h_{ij} für den entsprechenden Atlas des assoziierten Faserraumes $\bar{W}$: $h_{ij}(u) = \chi(g_{ij}(u)) = \chi([s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}]) \in GL(q, C)$, $u \in U_i \cap U_j$, ebenfalls konstant in $U_i \cap U_j$. Umgekehrt entsteht auch jedes Vektorraumbündel über $\bar{X}$ mit der Strukturgruppe $GL(q, C)$ und konstanten Koordinatentransformationen aus dem Hauptfaserraum $\hat{X}$ vermöge eines Homomorphismus $\chi: G \rightarrow GL(q, C)$. Es gilt genauer: Die Isomorphieklassen stetiger Faserbündel über $\bar{X}$ mit der mit der diskreten Topologie versehenen topologischen Gruppe $GL(q, C)$ als Strukturgruppe entsprechen eineindeutig den Klassen von Homomorphismen $\chi: G = \pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$ unter inneren Automorphismen von $GL(q, C)$. Vgl. [13], § 13, 14.

Die meromorphen Schnitte des komplex-analytischen Vektorraumbündels $\bar{W} = H \times_G F$ entsprechen nach 2.1 Satz 1 eineindeutig den meromorphen Vektoren f auf $H = \hat{X}$ mit $f(\hat{x} \cdot s) = s^{-1} \cdot f(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{X}$, $s \in G$. Nun bedeutet dies aber

mit (7) $(f)s(\hat{x}) = f \circ s^{-1}(\hat{x}) = f(\hat{x} \cdot s^{-1}) = s \cdot f(\hat{x}) = \chi(s)f(\hat{x})$, letzteres wegen (10), also kurz $(f)s = \chi(s)f$, $s \in G$. Dies stimmt mit (9) in Def. 2 überein. Die Funktionen f aus der Riemannschen Klasse R entsprechen also eineindeutig meromorphen Schnitten des R zugeordneten Vektorraumbündels $\bar{W}$, nämlich denjenigen, deren zugeordnete meromorphe Vektoren f Komponenten aus $\hat{K}$ besitzen, d.h. die sich bestimmt in den a_λ , $\lambda \in A$, verhalten. Wir wollen hier noch kurz zeigen, wie aus einem solchen f auf $\hat{X}$ die Darstellungen $f_i(u)$, $u \in U_i$ durch meromorphe Vektoren in dem obengenannten Atlas von $\bar{W}$ entstehen, die den meromorphen Schnitt nach 2.1 Def. 1 angeben. Man setzt mit den Bezeichnungen von 2.1 beim Nachweis, daß H_{x_0} lokal trivial ist, für $i \in J$ $f_i(u) = f([s_i t_i(u)])$, $u \in U_i$, $[s_i t_i(u)] \in \hat{X}$. $f_i(u)$ ist meromorph und ein-

deutig in U_i und erfüllt für $u \in U_i \cap U_j$

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_i(u) &= \mathfrak{f}([s_i t_i(u)]) = \mathfrak{f}([s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1} s_j t_j(u)]) = \mathfrak{f}([(s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}) (s_j t_j(u))]) \\ &= \mathfrak{f}([s_j t_j(u)] \cdot [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}]^{-1}) = [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}] \cdot \mathfrak{f}([s_j t_j(u)]) \\ &= \chi([s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}]) \mathfrak{f}_j(u), \quad [s_i t_i(u) t_j^{-1}(u) s_j^{-1}] \in G = \pi_1(\bar{X}, x_0), \end{aligned}$$

nach 2.1 (1), (6) und (10). Also ist, wie in Def. 1 gefordert, $\mathfrak{f}_i(u) = h_{ij}(u) \mathfrak{f}_j(u)$ für $u \in U_i \cap U_j$, $h_{ij}(u) \in GL(q, C)$ die oben angegebenen konstanten Koordinatentransformationen von $\bar{W}$. Nennt man noch einen meromorphen Schnitt von $\bar{W}$ bestimmt in a_λ , wenn dies für die ihn nach Def. 1 darstellenden meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}_i(u)$ für U_i , deren abgeschlossene Hülle a_λ enthält, der Fall ist, so können wir abschließend sagen

Satz 2. *Einer Riemannschen Klasse R über X läßt sich eindeutig ein komplex-analytisches Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X} = X - \{a_\lambda; \lambda \in A\}$ zuordnen, so daß der K -Vektorraum der Funktionen $\mathfrak{f} \in R$ isomorph dem K -Vektorraum derjenigen meromorphen Schnitte von $\bar{W}$ ist, die sich in $a_\lambda, \lambda \in A$, bestimmt verhalten.*

2.3. Die Verzweigungspunkte Riemannscher Klassen

Um für das eben der Riemannschen Klasse R zugeordnete Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X}$ die richtige Abschließung in den Verzweigungspunkten $a_\lambda, \lambda \in A$, zu einem über ganz X komplex-analytischen Vektorraumbündel W zu finden, sollen hier kurz die im wesentlichen klassischen Ergebnisse über das Verhalten der Funktionen (und entsprechend der Differentiale) aus R in einem festen Verzweigungspunkt a_λ zusammengestellt werden.

U sei eine hinreichend kleine, in einer Ortsuniformisierenden $t(x)$ mit $t(a_\lambda) = 0$ kreisförmige Umgebung von a_λ , $\dot{U} = U - \{a_\lambda\}$, $\hat{U}$ die universelle Überlagerungsfläche von $\dot{U}$. Wir können uns auf die Untersuchung auf $\hat{U}$ meromorpher Vektoren beschränken. $\bar{q}^1(\dot{U}) < \hat{X}$ (vgl. 2.1, 2.2) zerfällt nämlich in Komponenten, die jeweils vom Typ $\hat{U}$ sind. $\hat{U}$ wird uniformisiert durch $w = \log t = \varrho + i\varphi$, $-\infty < \varphi < +\infty$. Wichtig wird die Betrachtung in a_λ sich bestimmt verhaltender auf $\hat{U}$ meromorpher Vektoren $\mathfrak{f}$ sein (vgl. 1.2, Def. 1). Eine auf der gesamten universellen Überlagerungsfläche $\hat{X}$ von $\bar{X}$ meromorphe Funktion heißt natürlich nur bestimmt in a_λ , wenn sie in jeder Komponente von $\bar{q}^1(\dot{U}) < \hat{X}$ bestimmt im Sinne dieser Definition ist. Für Vektoren der Eigenschaft (9) in Def. 2: $(\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}$, $s \in G$, mit einem Homomorphismus $\chi: G \rightarrow GL(q, C)$ folgt allerdings die Bestimmtheit von $\mathfrak{f}$ in allen Zusammenhangskomponenten aus der Bestimmtheit in einer solchen, da G die Blätter von $\hat{X}$ transitiv permutiert und $\mathfrak{f}$ dabei nur eine konstante Matrix aufnimmt. Die Beschränkung der Betrachtung auf eine Komponente, also auf $\hat{U}$, führt zu zyklischer Deckbewegungsgruppe G' von $\hat{U}$ über $\dot{U}$. z sei ein erzeugendes Element von G' , $A = (a_{\nu\mu}) \in GL(q, C)$, $a_{\nu\mu} = \text{const.}$ Wir untersuchen auf $\hat{U}$ meromorphe Vektoren $\mathfrak{f}$ mit der Eigenschaft $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$.

Dazu verschaffen wir uns erst eine zu A uniformisierende Matrix $\mathfrak{A}$ ⁴⁾. Das soll eine auf $\hat{U}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{U}$ mit $(\mathfrak{A})z = A \mathfrak{A}$ sein. Man findet eine solche, indem man A durch Transformation mit einer Matrix B , $\det(B) \neq 0$, auf Jordansche Normalform bringt: $C = BAB^{-1}$,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad C_\sigma = \begin{pmatrix} \mu_\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \mu_\sigma & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & \mu_\sigma & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mu_\sigma \end{pmatrix} \quad l_\sigma$$

$\det(\lambda E - A) = \prod_{\sigma=0}^s (\lambda - \mu_\sigma)^{l_\sigma}$, und erst eine auf $\hat{U}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{U}$ mit $(\mathfrak{C})z = C \mathfrak{C}$ sucht. Damit erhält man eine Matrix $\mathfrak{A}$ in der Form $\mathfrak{A} = B^{-1} \mathfrak{C}$. Eine Matrix $\mathfrak{C}$ kann man zusammensetzen aus auf $\hat{U}$ holomorphen und holomorph umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{C}_\sigma$ mit $(\mathfrak{C}_\sigma)z = C_\sigma \mathfrak{C}_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, s$:

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1 & & & \\ & \mathfrak{C}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathfrak{C}_s \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\mathfrak{C}_\sigma = \Delta_\sigma \mathfrak{D}_\sigma$,

$$\Delta_\sigma = \begin{pmatrix} t^{\alpha_\sigma} & & & \\ & \frac{t^{\alpha_\sigma}}{\mu_\sigma} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{t^{\alpha_\sigma}}{\mu_\sigma^{s-1}} \\ 0 & & & & t^{\alpha_\sigma} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \frac{t^{\alpha_\sigma}}{\mu_\sigma^{l_\sigma-1}} \end{pmatrix} \quad l_\sigma, \quad \alpha_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \log \mu_\sigma,$$

$$\mathfrak{D}_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ \binom{l}{1} & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \binom{l}{s-1} & \binom{l}{s-2} & \dots & \binom{l}{1} & 1 \\ & & & \ddots & \\ & \binom{l}{l_\sigma-1} & \binom{l}{l_\sigma-2} & \dots & \binom{l}{1} & 1 \end{pmatrix} \quad l_\sigma,$$

⁴⁾ Große Buchstaben bezeichnen in diesem Abschnitt Matrizen mit konstanten, große Frakturbuchstaben solche mit veränderlichen Elementen.

$l = l(t) = \frac{1}{2\pi i} \log t$, leisten das Gewünschte: Δ_σ und $\mathfrak{D}_\sigma$ sind beide holomorph auf $\hat{U}$ und dort holomorph umkehrbar, Δ_σ als Diagonalmatrix mit Elementen $\neq 0$ und $\mathfrak{D}_\sigma$ als Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonale. $\mathfrak{D}_\sigma^{-1}$ ist wieder eine Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonale, deren Elemente Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten in den Elementen von $\mathfrak{D}_\sigma$, also Polynome in $\log t$ mit konstanten Koeffizienten sind. Es ist $(\log t)z = \log t + 2\pi i$, $(l)z = l + 1$ und damit $\left(\begin{pmatrix} l \\ \nu \end{pmatrix}\right)z = \begin{pmatrix} l \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l \\ \nu-1 \end{pmatrix}$. Also ist

$$(\mathfrak{D}_\sigma)z = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathfrak{D}_\sigma$$

und wegen $(t^{\alpha_\sigma})z = \mu_\sigma t^{\alpha_\sigma}$ $(\mathfrak{D}_\sigma)z = (\Delta_\sigma \mathfrak{D}_\sigma)z = (\Delta_\sigma)z (\mathfrak{D}_\sigma)z = C_\sigma (\Delta_\sigma \mathfrak{D}_\sigma) = C_\sigma \mathfrak{C}_\sigma$, wie gewünscht. Die Exponenten $\alpha_\sigma = \frac{1}{2\pi i} \log \mu_\sigma$ sind durch diese Formel nur mod 1 bestimmt. Sie werden meist festgelegt durch die Normierung

$$(11) \quad 0 \leq \operatorname{Re}(\alpha_\sigma) < 1.$$

Die Exponenten in Δ_σ^{-1} sind dann $-\alpha_\sigma$, also dual normiert $-1 < \operatorname{Re}(-\alpha_\sigma) \leq 0$.

Hilfssatz 1. Zu A gibt es stets uniformisierende Matrizen $\mathfrak{A}$, auf $\hat{U}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrizen mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$. Man kann eine solche, $\mathfrak{A}_0$, so wählen, daß ihre Elemente von der Form $\sum_{i,\mu} c_{i,\mu} t^{\alpha_i} \log^\mu t$ mit konstanten $c_{i,\mu}$, $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha_i) < 1$, und die Elemente von $\mathfrak{A}_0^{-1}$ ebenfalls von dieser Form, nur mit $-1 < \operatorname{Re}(\alpha_i) \leq 0$, sind. $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_0^{-1}$ verhalten sich beide bestimmt in a_λ und $\det(\mathfrak{A}_0) = t^{\sum_{\sigma=1}^s l_\sigma \alpha_\sigma} \cdot c$, $c \in \mathbb{C}$ und $\neq 0$. Aus einer uniformisierenden Matrix zu A , etwa aus $\mathfrak{A}_0$, erhält man alle solchen in der Form $\mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}$ mit auf $\hat{U}$ holomorphem und holomorph umkehrbarem $\mathfrak{E}$, das $(\mathfrak{E})z = \mathfrak{E}$ erfüllt, also eindeutig in $\hat{U}$ ist.

Die Bedeutung der uniformisierenden Matrizen liegt in

Hilfssatz 2. Die auf $\hat{U}$ meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$ entsprechen vermöge $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$, $\mathfrak{A}$ eine uniformisierende Matrix zu A , eineindeutig den in $\hat{U}$ meromorphen und dort eindeutigen Vektoren $\mathfrak{f}_\lambda$.

Nimmt man an Stelle von $\mathfrak{A}$ die oben in Hilfssatz 1 genannte spezielle Matrix $\mathfrak{A}_0$, so ergibt sich durch Zusammenfassen

Hilfssatz 3. Die Komponenten f^κ , $\kappa = 1, \dots, q$ eines auf $\hat{U}$ meromorphen Vektors $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$ besitzen Darstellungen als Summen der Form

$$(12) \quad f^\kappa = \sum_{i,\mu} \psi_{i,\mu}^{(\kappa)} t^{\alpha_i} \log^\mu t$$

mit in $\dot{U}$ eindeutigen und meromorphen Funktionen $\psi_{i\mu}^{(x)}(t)$. Die Exponenten sollen dabei verschieden und nach (11) normiert sein.

Für solche Darstellungen gilt ein bekannter Eindeutigkeitssatz [11]:

Hilfssatz 4. *Besitzt eine auf $\hat{U}$ meromorphe Funktion f eine Darstellung der Form (12), so ist diese eindeutig. Die $\psi_{i\mu}^{(x)}$ sind durch $f^{(x)}$ eindeutig bestimmt.*

Die genannte eindeutige Darstellung der Funktionen f einer Riemannschen Klasse R in den logarithmischen Windungspunkten der einzelnen Komponenten von $\bar{q}^1(\dot{U}) \subset \hat{X}$ gestattet es, diese fast wie die gewöhnlichen Punkte einer Riemannschen Fläche zu behandeln. Dies zeigt sich sogleich, wenn wir f auf bestimmtes Verhalten untersuchen. Wir betrachten wieder $\hat{U}$ und auf $\hat{U}$ meromorphe Vektoren f mit $(f)z = Af$. Es gilt

Hilfssatz 5. *Unter den zu A uniformisierenden Matrizen $\mathfrak{A}$ sind es genau die in a_λ bestimmten, die die Eigenschaft haben: Die nach Hilfssatz 2 vermöge $f = \mathfrak{A}f_\lambda$ bestehende eindeutige Zuordnung zwischen auf $\hat{U}$ meromorphen Vektoren f mit $(f)z = Af$ und in $\dot{U}$ (eindeutigen) meromorphen Vektoren f_λ bildet die in a_λ bestimmten f auf die in ganz U meromorphen f_λ ab.*

Beweis. Ist die zu A uniformisierende Matrix $\mathfrak{A}$ bestimmt in a_λ , so gilt dasselbe von $\mathfrak{A}^{-1}$. Nach Hilfssatz 1 ist nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}$ mit in $\dot{U}$ eindeutigem holomorph umkehrbarem $\mathfrak{E}$. Nun ist wegen $\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_0^{-1} \mathfrak{A}$ $\mathfrak{E}$ bestimmt in a_λ , also da in $\dot{U}$ eindeutig, meromorph in a_λ . Dasselbe gilt dann von $\mathfrak{E}^{-1}$, d.h. $\mathfrak{E}^{-1}$ ist ebenfalls bestimmt und mithin auch die inverse Matrix $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}^{-1} \mathfrak{A}_0^{-1}$. Nunmehr sind wegen $f = \mathfrak{A}f_\lambda$, $f_\lambda = \mathfrak{A}^{-1}f$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{-1}$ bestimmt in a_λ , f und f_λ beide gleichzeitig bestimmt oder nicht bestimmt in a_λ . Für einen in $\dot{U}$ eindeutigen meromorphen Vektor f_λ ist jedoch Bestimmtheit in a_λ mit f_λ meromorph in ganz U (in a_λ können höchstens Pole auftreten) gleichbedeutend.

Nebenbei erhalten wir eine Übersicht über alle zu A uniformisierenden Matrizen $\mathfrak{A}$, die sich in a_λ bestimmt verhalten: Sie lassen sich darstellen in der Form $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}$ mit in $\dot{U}$ eindeutigem, holomorph umkehrbarem $\mathfrak{E}$, das in a_λ meromorph ist. Ferner kann man sie in Klassen einteilen, indem man in eine Klasse alle diejenigen $\mathfrak{A}$ wirft, die sich nur um einen rechtsseitigen Faktor $\mathfrak{E}$ unterscheiden, der in ganz U holomorph umkehrbar ist. In derselben Klasse liegende $\mathfrak{A}$ haben sicher dieselbe Ordnung $w(\mathfrak{A})$. Darunter verstehen wir die eindeutig bestimmte komplexe Zahl $w(\mathfrak{A})$ mit $\det(\mathfrak{A}) = t^{w(\mathfrak{A})} \varphi(t)$, $\varphi(t)$ holomorph und $\neq 0$ in a_λ . Uniformisierende Matrizen $\mathfrak{A}$ mit derselben Ordnung brauchen jedoch keineswegs in derselben Klasse zu liegen. Es ist $w(\mathfrak{A}) = w(\mathfrak{A}_0 \mathfrak{E}) = w(\mathfrak{A}_0) + w(\mathfrak{E}) = \sum_{\sigma=1}^s l_\sigma \alpha_\sigma + \text{ganze Zahl}$ (Hilfssatz 1). Nun ist $\sum_{\sigma=1}^s l_\sigma \alpha_\sigma = \sum_{\sigma=1}^s l_\sigma l(\mu_\sigma) = l\left(\prod_{\sigma=1}^s \mu_\sigma^{l_\sigma}\right) = l(\det(A)) = \frac{1}{2\pi i} \log(\det(A))$, wo ein durch die Normierung $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha_\sigma) < 1$ eindeutig bestimmter Wert des Logarithmus zu nehmen ist. Jedenfalls ist für jedes $\mathfrak{A}$ $w(\mathfrak{A}) \equiv \frac{1}{2\pi i} \log(\det A) \pmod{1}$, und

es gibt offenbar auch zu einer beliebigen Zahl $\frac{1}{2\pi i} \log(\det(A)) \bmod 1$ zu A uniformisierende Matrizen $\mathfrak{A}$ mit dieser Ordnung.

Nimmt man in Hilfssatz 5 wieder die in Hilfssatz 1 genannte spezielle Matrix $\mathfrak{A}_0$, so ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

Hilfssatz 6. Die nach Hilfssatz 3 und 4 eindeutige Darstellung der Komponenten eines Vektors $\mathfrak{f}$ in der Form (12) besitzt genau dann in a_λ , also in ganz U , meromorphe Koeffizienten $\psi_{i_\mu}^{(x)}(t)$, wenn $\mathfrak{f}$ sich in a_λ bestimmt verhält.

Daß für in U meromorphe $\psi_{i_\mu}^{(x)} f^x$ und damit $\mathfrak{f}$ sich in a_λ bestimmt verhalten, ergibt sich so: f^x ist Summe von Produkten in a_λ bestimmter Funktionen. — Entwickelt man die (eindeutig bestimmten) Koeffizienten $\psi_{i_\mu}^{(x)}(t)$ in der Darstellung (12) einer Funktion $\mathfrak{f}$ aus einer Riemannschen Klasse R auf einer bestimmten Komponente von $\bar{q}^1(\dot{U}) < \hat{\bar{X}}$ in Laurentreihen nach t (mit abbrechendem negativen Ast), so erhält man eine Entwicklung von $\mathfrak{f}$ in dem der Komponente zugehörigen logarithmischen Windungspunkt über a_λ , die den Entwicklungen von $\mathfrak{f}$ in den Punkten von $\bar{x} \in \hat{\bar{X}}$ in Laurentreihen nach den Ortsuniformisierenden zur Seite zu stellen ist.

Ein Element $\mathfrak{f}$ der Riemannschen Klasse R heißt natürlich *holomorph* in $\hat{x} \in \hat{\bar{X}}$, wenn die Komponenten des Vektors $\mathfrak{f}$ dort holomorph sind. Wir setzen nun für die Windungspunkte über a_λ der Komponenten von $\bar{q}^1(\dot{U}) < \hat{\bar{X}}$ fest

Def. 3. $\mathfrak{f}$ heißt *holomorph* in dem zur Komponente gehörigen Windungspunkt, wenn in der Darstellung (12) von $\mathfrak{f}$ auf dieser Komponente die Koeffizienten $\psi_{i_\mu}^{(x)}(t)$ holomorph in $t=0$, also in a_λ , sind.

Diese Definition ist offenbar unabhängig von der gewählten Ortsuniformisierenden t in a_λ . Dagegen hängt sie sehr wohl ab von der Normierung (11) $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha_o) < 1$. — In allen Punkten $\hat{x} \in \hat{\bar{X}}$ mit demselben Spurpunkt $q(\hat{x}) = x$ und in allen logarithmischen Windungspunkten über demselben Verzweigungspunkt a_λ ist $\mathfrak{f}$ stets gleichzeitig holomorph bzw. nicht holomorph [wegen (9) in Def. 2]. Man nennt daher $\mathfrak{f}$ wohl auch holomorph in $x \in \bar{X}$ bzw. in a_λ .

Hilfssatz 7. Ist $\mathfrak{f}$ ein meromorpher Vektor auf $\hat{U}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$, $\mathfrak{A}$ eine zu A uniformisierende Matrix, dann gilt: Genau für diejenigen $\mathfrak{A}$, die der durch $\mathfrak{A}_0$ (Hilfssatz 1) bestimmten Klasse angehören, sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_\lambda$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$, stets beide zugleich holomorph bzw. nicht holomorph in a_λ .

Beweis. Ist $\mathfrak{f}_\lambda$ holomorph in a_λ , so ergibt sich nach Multiplikation mit $\mathfrak{A}_0$ durch Zusammenfassen aus der speziellen Form der Elemente von $\mathfrak{A}_0$ eine Darstellung (12) für $\mathfrak{f}$ mit in a_λ holomorphen Koeffizienten $\psi_{i_\mu}^{(x)}$. $\mathfrak{f}$ ist also nach Def. 3 holomorph. Ist umgekehrt $\mathfrak{f}$ holomorph, so besitzt es in der Darstellung (12) holomorphe Koeffizienten. Nun ist $\mathfrak{f}_\lambda = \mathfrak{A}_0^{-1}\mathfrak{f}$, und $\mathfrak{A}_0^{-1}$ hat nach Hilfssatz 1 Glieder derselben Bauart, lediglich mit Exponenten $-1 < \operatorname{Re}(-\alpha_o) \leq 0$. Nach Ausmultiplikation erhält man durch Zusammenfassen für die Komponenten von $\mathfrak{f}_\lambda$ eine Darstellung, in der wegen der Eindeutigkeit von $\mathfrak{f}_\lambda$ in $\dot{U}$ nach Hilfssatz 4 nur jeweils das Glied ohne Logarithmen

und t^α übrig bleibt, welches sicher holomorph ist, da $\mathfrak{f}$ holomorphe Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\kappa)}$ hatte.

Stellt man neben die Riemannsche Klasse R die *duale Klasse* R^* (vgl. 1.3), so ist es zweckmäßig, die Normierung (11) $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha_\sigma) < 1$ bei der dualen Klasse durch die *duale Normierung* (13) $-1 < \operatorname{Re}(\alpha_\sigma) \leq 0$ zu ersetzen. Die Hilfssätze und Def. 3 gelten dann mit dieser Abänderung unverändert. In der dualen Klasse ist also bei uns *Holomorphie in den Verzweigungspunkten anders definiert*. Darin unterscheiden wir uns von älteren Darstellungen (z.B. [8]). Unsere Normierung wird sich jedoch im nächsten Abschnitt schon bewähren.

Betrachtet man an Stelle von Funktionen $\mathfrak{f}$ *Differentiale* $\mathfrak{d}$ aus der Riemannschen Klasse R (vgl. 1.3), so läßt sich alles Obige entsprechend auf Differentiale übertragen. Mit Hilfe der speziellen uniformisierenden Matrix $\mathfrak{A}_0$ (Hilfssatz 1) erhält man wie in Hilfssatz 3 für die Komponenten δ^κ , $\kappa = 1, \dots, q$ eines auf $\hat{U}$ meromorphen Differentials $\mathfrak{d}$ mit $(\mathfrak{d})z = A\mathfrak{d}$ Darstellungen $\delta^\kappa = \sum_{i,\mu} \omega_{i\mu}^{(\kappa)} t^{\alpha_i} \log^\mu t$ mit in $\hat{U}$ eindeutigen und meromorphen *Differentialen* $\omega_{i\mu}^{(\kappa)}(t)$ usw. Alle Hilfssätze gelten *bei gleichlautender Definition 3*, ebenso wie das über die duale Klasse R^* Gesagte, entsprechend für Differentiale. Man hat nur jeweils für Vektoren aus Funktionen Vektoren aus Differentialen und für Funktionen Differentiale zu lesen.

Auch die Differentiale $\mathfrak{d} \in R$ lassen sich 2.2 entsprechend als meromorphe Schnitte eines bestimmten Vektorraumbündels auffassen: Mit dem in [6] S. 70 definierten Vektorraumbündel T der kovarianten Tangentialvektoren der komplexen Mannigfaltigkeit $\bar{X}$, einem komplex-analytischen Vektorraumbündel mit der Faser C^1 (Geradenbündel), und dem nach 2.2 Satz 1 der Riemannschen Klasse R zugeordneten Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X}$ bildet man das komplex-analytische Vektorraumbündel $\bar{W} \otimes T^5$ über $\bar{X}$ mit der Faser C^q . Dann kann man entsprechend Satz 1 einen K -Isomorphismus zwischen den Differentialen $\mathfrak{d} \in R$ und denjenigen meromorphen Schnitten von $\bar{W} \otimes T$ stiften, die in a_λ , $\lambda \in A$, sich bestimmt verhalten.

Auf eine Funktion $\mathfrak{f} \in R$ läßt sich der Differentialoperator d komponentenweise anwenden. Man erhält so einen Vektor $d\mathfrak{f}$ auf $\hat{X}$ meromorpher Differentiale, der (9) $(d\mathfrak{f})s = \chi(s)d\mathfrak{f}$, $s \in G$, erfüllt. $d\mathfrak{f}$ verhält sich auch bestimmt in a_λ , $\lambda \in A$, wie sich aus Hilfssatz 6 ergibt: Bildet man die Differentiale $d\mathfrak{f}^\kappa$ der Komponenten $\mathfrak{f}^\kappa$ in der Summendarstellung (12) gliedweise, so erhält man, da $\mathfrak{f}$ in ganz U meromorphe Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(\kappa)}$ besitzt, eine ebensolche Darstellung (12) für $d\mathfrak{f}^\kappa$ mit in ganz U meromorphen Differentialen als Koeffizienten. Hilfssatz 6 für Differentiale in der umgekehrten Richtung angewandt ergibt jetzt: $d\mathfrak{f}$ verhält sich bestimmt in a_λ , also $d\mathfrak{f} \in R$. Komponentenweise Division von $d\mathfrak{f}$ durch ein festes meromorphes Differential ω auf X liefert wieder eine Funktion $\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{f}}{\omega} \in R$.

⁵⁾ Siehe [6], S. 50f.

Satz 3. *Differential $d\mathfrak{f}$ und Ableitung $\mathfrak{f}' = \frac{d\mathfrak{f}}{\omega}$ einer Funktion $\mathfrak{f} \in R$ liegen wieder in R .*

Dies beruht wesentlich darauf, daß die in U meromorphen Koeffizienten $\psi_{i\mu}^{(x)}$ abgeleitet wieder in U meromorphe Funktionen ergeben.

2.4. Riemannsche Klassen und komplex-analytische Vektorraumbündel über X

In diesem Abschnitt konstruieren wir zu dem einer Riemannschen Klasse R nach 2.2 Satz 2 zugeordneten Vektorraumbündel $\bar{W}$ über $\bar{X}$ ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über ganz X , so daß

1. W über $\bar{X}$ das Bündel $\bar{W}$ induziert, man also, wenn p die Projektion $W \rightarrow X$ bedeutet, $\bar{W} = \bar{p}^1(\bar{X}) \subset W$ annehmen kann.

2. Genau die in a_λ bestimmten Schnitte von $\bar{W}$ (s. 2.2) sich zu meromorphen Schnitten von W fortsetzen lassen.

3. Dabei genau die den in a_λ holomorphen $\mathfrak{f} \in R$ entsprechenden Schnitte in die in a_λ holomorphen Schnitte von W übergehen.

[Ein meromorpher Schnitt eines Vektorraumbündels W heißt *holomorph* in einem Punkt $x \in X$, wenn in einem Atlas von W zu einer Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ der nach 2.1 Def. 1 den Schnitt in U_i , $x \in U_i$, darstellende meromorphe Vektor $m_i(u)$, $u \in U_i$, holomorph in x ist. Diese Definition ist offenbar unabhängig von dem speziell gewählten Atlas der komplex-analytischen Faserstruktur von W .]

Es ergibt sich: Ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über X mit 1., 2. und 3. existiert und ist dadurch bis auf (komplex-analytische) Isomorphie eindeutig bestimmt.

Für andere Anwendungen diskutieren wir hier sogleich alle möglichen Abschließungen eines komplex-analytischen Vektorraumbündels in einem Punkt. $\dot{W}$ sei ein solches über einer punktierten Umgebung $\dot{U}$ von a_λ . Dann gilt

Hilfssatz 8. *Die komplex-analytischen Abschließungen von $\dot{W}$ zu einem W über der vollen Umgebung U von a_λ entsprechen den holomorphen Schnitten über punktierten Umgebungen $\dot{V}$ von a_λ des $\dot{W}$ assoziierten komplex-analytischen $GL(q, C)$ -Hauptfaserraumes $\dot{H}$. Zwei solche Schnitte über demselben $\dot{V}$ unterscheiden sich in einem Atlas um eine in $\dot{V}$ holomorphe und holomorph umkehrbare Matrix als Rechtsfaktor. Genau dann, wenn diese auch noch in a_λ , also in ganz V , holomorph und holomorph umkehrbar ist, führen die beiden Schnitte zu isomorphen W über U .*

Beweis. Zu jeder Abschließung W von $\dot{W}$ gibt es, da W lokal trivial ist, eine Umgebung V von a_λ , so daß $\bar{p}^1(V) \subset W$ trivial ist. Ein Faserraum W ist aber genau dann (analytisch) trivial, wenn im assoziierten $GL(q, C)$ -Hauptfaserraum H ein holomorpher Schnitt existiert ([3], exp. VI, 5. prop. 2).

Dieser ergibt, eingeschränkt auf $\dot{V}$, einen holomorphen Schnitt im $\dot{W}$ assoziierten Hauptfaserraum $\dot{H}$, wenn man mit q als Projektion: $H \rightarrow U \dot{H} = \bar{q}^1(\dot{V}) \subset H$ annimmt. — Umgekehrt führt ein holomorpher Schnitt über $\dot{V}$ im assoziierten $GL(q, C)$ -Hauptfaserraum $\dot{H}$, in einem Atlas von $\dot{H}$ zur Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ mit Koordinatentransformationen $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(q, C)$ holomorph, dargestellt durch holomorphe und holomorph umkehrbare Matrizen $\mathfrak{G}_i(u)$, $u \in U_i \cap \dot{V}$ mit $\mathfrak{G}_i = g_{ij} \mathfrak{G}_j$ in $U_i \cap U_j \cap \dot{V}$, zu einer Abschließung W , also zu einem komplex-analytischen Vektorraumbündel W über U , das über $\dot{U}$ $\dot{W}$ induziert. Man hat dazu nur einen Atlas der analytischen Faserstruktur von W anzugeben, der den obigen Atlas von $\dot{W}$ enthält und aus diesem durch Hinzufügen einer zusätzlichen überdeckenden Menge U_λ , $a_\lambda \in U_\lambda$ und zusätzlichen Koordinatentransformationen $g_{\lambda i}: U_\lambda \cap U_i \rightarrow GL(q, C)$ holomorph, mit den Verträglichkeitsbedingungen $g_{i\lambda} = g_{ij} g_{j\lambda}$ in $U_i \cap U_j \cap U_\lambda$, $g_{\lambda i} = g_{i\lambda}^{-1}$ entsteht. Solch eine Ergänzung zu einem Atlas über U erhält man aber aus einem holomorphen Schnitt über $\dot{V}$, indem man $U_\lambda = V$, $g_{i\lambda} = \mathfrak{G}_i: U_i \cap U_\lambda \rightarrow GL(q, C)$ holomorph setzt. Der Schnitt über $\dot{V}$ läßt sich in dem W assoziierten H zu einem Schnitt über V fortsetzen. Man hat dazu in dem eben erhaltenen Atlas nur $\mathfrak{G}_\lambda = E$ (Einsmatrix) in U_λ zu setzen: Es ist $\mathfrak{G}_i = g_{i\lambda} \mathfrak{G}_\lambda = g_{i\lambda}$ in $U_i \cap U_\lambda$. — Für einen zweiten solchen holomorphen Schnitt, im selben Atlas dargestellt durch holomorph umkehrbare $\mathfrak{G}'_i(u)$, $u \in U_i \cap \dot{V}$ mit $\mathfrak{G}'_i = g_{ij} \mathfrak{G}'_j$ in $U_i \cap U_j \cap \dot{V}$, ergibt sich $\mathfrak{G}_i^{-1} \mathfrak{G}'_i = \mathfrak{G}_j^{-1} g_{ij}^{-1} g_{ij} \mathfrak{G}'_j = \mathfrak{G}_j^{-1} \mathfrak{G}'_j = \mathfrak{E}$. $\mathfrak{E}$ ist holomorph umkehrbar und eindeutig in $\dot{V}$ und $\mathfrak{G}'_i = \mathfrak{G}_i \mathfrak{E}$ für alle $i \in J$. Führen beide Schnitte zu isomorphen W , so lassen sich beide zu holomorphen Schnitten über V in H fortsetzen, und $\mathfrak{E}$ ist nach derselben Schlußweise also auch in a_λ holomorph umkehrbar.

Über einer Umgebung $\dot{U}$ von a_λ gibt es stets holomorphe Schnitte in $\dot{H}$, d. h. das Vektorraumbündel $\dot{W}$ ist, da es eine nicht kompakte Basis $\dot{U}$ besitzt, stets (analytisch) trivial (vgl. [10], 3.). In unserem Fall eines Vektorraumbündels $\dot{W}$ mit konstanten Koordinatentransformationen kann man die holomorphen Schnitte über punktierten Umgebungen $\dot{V}$ des Punktes a_λ sehr leicht direkt angeben. Wir können uns dabei auf ein $\dot{W}$ über einer punktierten kreisförmigen Umgebung $\dot{U}$ der in 2.3 betrachteten Art beschränken. Der Faser-raum $\dot{W}$ und der $\dot{W}$ assoziierte $GL(q, C)$ -Hauptfaserraum $\dot{H}$ sind, da sie in entsprechenden Atlanten dieselben konstanten Koordinatentransformationen besitzen, beide vermöge desselben Homomorphismus $\chi': \pi_1(\dot{U}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$ assoziiert der universellen Überlagerungsfläche $\hat{U}$ von $\dot{U}$ aufgefaßt als Hauptfaserraum mit der Deckbewegungsgruppe $G' = \pi_1(\dot{U}, x_0)$, $x_0 \in \dot{U}$, als Strukturgruppe (vgl. dazu 2.1, 2.2 und [13], § 13, § 14). G' ist zyklisch, z sei ein erzeugendes Element von G' , χ' ist bestimmt durch $\chi'(z) = A \in GL(q, C)$. Dann gilt

Hilfssatz 9. Die holomorphen Schnitte über punktierten Umgebungen $\dot{V}$ von a_λ des Hauptfaserraumes $\dot{H}$ entsprechen eineindeutig den in $\bar{q}^1(\dot{V}) \subset \hat{U}$

holomorphen und holomorph umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$. — Die meromorphen Schnitte von $\dot{W}$ entsprechen eineindeutig den auf $\hat{U}$ meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$.

Mit Hilfssatz 8 können wir sagen: Die Isomorphieklassen komplex-analytischer Abschließungen von $\dot{W}$ zu W über U entsprechen eineindeutig den Klassen von Keimen in a_λ auf $\hat{U}$ holomorpher und holomorph umkehrbarer Matrizen $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ nach der Gruppe der Keime in a_λ holomorph umkehrbarer Matrizen, wenn man in dieselbe Klasse zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ wirft, die sich nur um einen Rechtsfaktor aus dieser Gruppe unterscheiden. Fixiert man eine solche Matrix $\mathfrak{A}$, etwa $\mathfrak{A}_0$ aus 2.3 Hilfssatz 1, so erhält man alle solchen in der Form $\mathfrak{A}_0\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ aus der Gruppe der Keime in *punktierten* Umgebungen $\dot{V}$ von a_λ holomorph umkehrbarer Matrizen. Die verschiedenen komplex-analytischen Abschließungen W von $\dot{W}$ entsprechen also eineindeutig den Linksnebenklassen dieser Gruppe von Matrizen $\mathfrak{G}$ nach der Untergruppe der Keime in a_λ holomorph umkehrbarer Matrizen. Eine Klasseneinteilung dieser Art haben wir aber gerade in 2.3 für die zu A uniformisierenden Matrizen $\mathfrak{A}$ eingeführt.

Wie beim Beweis von Hilfssatz 8 dargelegt, erhält man aus den Darstellungen in einem Atlas eines holomorphen Schnittes über $\dot{V}$ im Hauptfaserraum $\dot{H}$ durch holomorph umkehrbare Matrizen $\mathfrak{G}_i$ in U_i einen Atlas für die dem Schnitt entsprechende Abschließung W von $\dot{W}$, indem man die neue Koordinatenumgebung $U_\lambda = V$ und die neuen Koordinatentransformationen $g_{i\lambda} = \mathfrak{G}_i$ in $U_i \cap U_\lambda$ zu dem Atlas von $\dot{W}$ hinzufügt. Damit ergibt sich unmittelbar: Entspricht der auf $\hat{U}$ meromorphe Vektor $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})z = A\mathfrak{f}$ einem meromorphen Schnitt von $\dot{W}$ und entspricht die in $\bar{q}^1(\dot{V}) \subset \hat{U}$ holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ dem eben genannten holomorphen Schnitt über $\dot{V}$ in $\dot{H}$, so wird der meromorphe Schnitt in dem so erhaltenen Atlas von W in U_λ durch $\mathfrak{f}_\lambda$ mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{A}\mathfrak{f}_\lambda$ dargestellt, $\mathfrak{f}_\lambda$ eindeutig und meromorph in $\dot{U}_\lambda$. Genau dann ist ein meromorpher Schnitt von $\dot{W}$ also zu einem meromorphen Schnitt von W fortsetzbar, wenn das ihm entsprechende $\mathfrak{f}_\lambda$ auch in a_λ höchstens einen Pol besitzt, $\mathfrak{f}_\lambda$ also meromorph in U_λ ist. Vgl. dazu den Schluß von 2.2.

Nun ist es leicht, die zu Beginn formulierte Behauptung zu beweisen: R sei die Riemannsche Klasse, $\bar{W}$ das R zugeordnete Vektorraumbündel über $\bar{X}$ mit konstanten Koordinatentransformationen, a_λ ein Verzweigungspunkt von R , in dem $\bar{W}$ jetzt abgeschlossen werden soll. Wir betrachten dazu eine kleine kreisförmige Umgebung U um a_λ und das durch $\bar{W}$ über U induzierte Bündel $\dot{W}$, dessen Abschließung eben untersucht wurde. Jede Abschließung von $\dot{W}$ ergibt natürlich eine Abschließung von $\bar{W}$ in a_λ , und so erhält man auch alle solchen. Es sei nun $\mathfrak{f}$ eine Funktion aus R . Ihr entspricht ein meromorpher Schnitt von $\bar{W}$, also auch ein meromorpher Schnitt von $\dot{W}$, und diesem wiederum

ein meromorpher Vektor $\dot{f}$ auf $\hat{U}$ mit $(\dot{f})z = A\dot{f}$. Dem bestimmten Verhalten von $f \in R$ in a_λ entspricht nun das bestimmte Verhalten von $\dot{f}$ in a_λ , der Holomorphie von f in a_λ die Holomorphie von $\dot{f}$ in a_λ . Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Zusammenhang zwischen Vektoren auf $\hat{X}(\hat{U})$ und Schnitten von $\bar{W}(\bar{W})$, letztere dargestellt in einem Atlas, wie er in 2.2 beschrieben wurde. Mit dem oben über Darstellung und Fortsetzbarkeit eines Schnittes von $\bar{W}$ in U_λ durch f_λ , $\dot{f} = \mathfrak{A}f_\lambda$ — $\mathfrak{A}$ soll dem der Abschließung zugrunde liegenden Schnitt des Hauptfaserraumes $\dot{H}$ entsprechen — Gesagten erhält man:

1. Genau die Klassen in a_λ bestimmter Keime von holomorph umkehrbaren Matrizen $\mathfrak{A}$ auf $\hat{U}$ mit $(\mathfrak{A})z = A\mathfrak{A}$ ergeben Abschließungen von $\bar{W}$ in a_λ mit der Eigenschaft: Die Funktionen $f \in R$ entsprechen Schnitten von $\bar{W}$, die sich zu meromorphen Schnitten der Abschließung fortsetzen lassen und umgekehrt.

2. Genau die durch $\mathfrak{A}_0$, 2.3 Hilfssatz 1, gegebenen Klasse führt zu einer Abschließung von $\bar{W}$ in a_λ mit der Eigenschaft: Die in a_λ holomorphen $f \in R$ entsprechen Schnitten von $\bar{W}$, die bei der Fortsetzung zu meromorphen Schnitten der Abschließung in a_λ holomorph sind und umgekehrt.

Beweis. 1. ergibt sich mit obigen Bemerkungen unmittelbar aus 2.3 Hilfssatz 5. 2. folgt ebenso aus 2.3 Hilfssatz 7 mit der Definition der Holomorphie eines meromorphen Schnittes in einem Punkt.

1. und 2. enthalten, der Reihe nach auf alle Verzweigungspunkte a_λ , $\lambda \in A$, angewandt,

Satz 4. *Zu einer Riemannschen Klasse R über X gibt es ein komplex-analytisches Vektorraumbündel W über X mit den zu Beginn dieses Abschnittes angeführten Eigenschaften 1., 2. und 3. W ist dadurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Satz 5. *Es besteht ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum über K der Funktionen aus R und dem Vektorraum über K der meromorphen Schnitte von W . Ein $f \in R$ ist genau dann holomorph an einer Stelle $x \in X$, wenn der ihm entsprechende meromorphe Schnitt des Bündels W holomorph in x ist. Bei diesem Isomorphismus geht also der Vektorraum über C der (überall) holomorphen Funktionen aus R in den Vektorraum über C der holomorphen Schnitte von W über.*

Betrachtet man neben der Riemannschen Klasse R die *duale Klasse* R^* (vgl. 1.3), so ist es für Dualitätsbetrachtungen zweckmäßig, der dualen Klasse R^* das zu dem R zugeordnete Bündel W *duale Bündel* W^* zuzuordnen. W^* ist wieder ein komplex-analytisches Vektorraumbündel. Man erhält einen Atlas von W^* in dem zu einem Atlas zu $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ mit den Koordinatentransformationen $g_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow GL(q, C)$ *dualen Atlas* zu derselben Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ mit den dualen Koordinatentransformationen $g_{ij}^* = {}^t(g_{ij}^{-1}): U_i \cap U_j \rightarrow GL(q, C)$. Nimmt man einen aus einem Atlas des Bündels $\bar{W}$ mit konstanten

Koordinatentransformationen durch Ergänzung in den Verzweigungspunkten a_λ , $\lambda \in A$, hervorgegangenen Atlas des Bündels W , so erkennt man: W^* induziert über $\bar{X}$ gerade das zu $\bar{W}$ duale Bündel $(\bar{W})^*$, welches ebenfalls konstante Koordinatentransformationen besitzt und mit dem zur dualen Riemannschen Klasse R^* nach 2.2 konstruierten Bündel über $\bar{X}$ übereinstimmt. W^* schließt also — wie W das Bündel $\bar{W}$ — das Bündel $(\bar{W})^*$ zu einem komplex-analytischen Bündel über ganz X ab. Man überlegt sich leicht, daß diese Abschließung gerade die für die duale Klasse R^* richtige ist: Dazu gehen wir nochmals zurück zur Abschließung des über U , $a_\lambda \in U$, durch $\bar{W}$ induzierten Bündels $\dot{W}$ in a_λ . $(\bar{W})^*$ induziert über U das zu $\dot{W}$ duale Bündel $(\dot{W})^*$. Entsteht $\dot{W}$ aus dem $\pi_1(\dot{U}, x_0)$ -Hauptfaserraum $\hat{U}$ vermöge des Homomorphismus $\chi': \pi_1(\dot{U}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$, bestimmt durch $\chi'(z) = A$, z erzeugendes Element von $G' = \pi_1(\dot{U}, x_0)$, so entsteht $(\dot{W})^*$ aus $\hat{U}$ vermöge des Homomorphismus $(\chi')^*$, bestimmt durch $(\chi')^*(z) = A^*$. $\dot{W}$ und damit $\bar{W}$ soll nun in a_λ durch den einer (zu A uniformisierenden) Matrix $\mathfrak{U}_0$ auf $\hat{U}$ des Hilfssatzes 1 in 2.3 entsprechenden Schnitt in a_λ abgeschlossen werden. Dies ergibt nach 2. eine richtige Abschließung von $\bar{W}$ in a_λ . Die Darstellungen des abschließenden Schnittes in einem Atlas ergeben aber sogleich die Koordinatentransformationen für einen Atlas der Abschließung. Man erhält daher eine Abschließung von $(\dot{W})^*$ mit dem dualen Atlas, also den dualen Koordinatentransformationen, wenn man $(\dot{W})^*$ durch den Schnitt, der der (zu A^* uniformisierenden) Matrix $\mathfrak{U}_0^*$ auf $\hat{U}$ entspricht, abschließt. Nun ist $\mathfrak{U}_0^* = {}^t(\mathfrak{U}_0^{-1})$ nach 2.3 Hilfssatz 1 eine Matrix derselben Bauart wie $\mathfrak{U}_0$, nur mit der dualen Normierung der Exponenten $-1 < \operatorname{Re}(\alpha_\sigma) \leq 0$. Die duale Abschließung von $(\dot{W})^*$ in a_λ — sie ergibt die duale Abschließung von $(\bar{W})^*$ in a_λ — erfüllt also 2., wenn man nur in der dualen Klasse R^* in der Definition der Holomorphie in den Verzweigungspunkten die duale Normierung zugrunde gelegt hat (vgl. 2.3).

Satz 6. *Der zu R dualen Riemannschen Klasse R^* , versehen mit der dualen Normierung, entspricht nach Satz 4 ein eindeutig bestimmtes Vektorraumbündel mit den Eigenschaften 1., 2. und 3. — Dieses ist gerade das zu W , dem nach Satz 4 R zugeordneten Bündel, duale Bündel W^* . Satz 5 gilt unverändert für R^* , W^* an Stelle von R , W .*

Nach 2.3 gilt alles dort Ausgeführte unverändert auch für Differentiale aus R bzw. R^* . Man kann also das dort genannte Bündel $\bar{W} \otimes T$ ganz ebenso zu einem komplex-analytischen Bündel über ganz X abschließen, so daß entsprechend die Eigenschaften 1., 2. und 3. gelten. Man erhält so das Bündel $W \otimes T$, wo jetzt T das Geradenbündel der kovarianten Tangentialvektoren über ganz X darstellen soll.

Satz 7. *Ist W das der Riemannschen Klasse R nach Satz 4 zugeordnete Bündel, so besteht ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum über K der Differentiale aus R und dem Vektorraum über K der meromorphen Schnitte von $W \otimes T$. Ein $\mathfrak{d} \in R$ ist genau dann holomorph an einer Stelle $x \in X$, wenn der*

ihm entsprechende meromorphe Schnitt des Bündels $W \otimes T$ holomorph in x ist. Bei dem genannten Isomorphismus geht also der C -Vektorraum der holomorphen Differentiale aus R in den C -Vektorraum der holomorphen Schnitte von $W \otimes T$ über. $W \otimes T$ ist durch diese Eigenschaft als Abschließung von $\bar{W} \otimes T$ eindeutig bestimmt. Entsprechendes gilt für die Differentiale der dualen Klasse R^* und das Bündel $W^* \otimes T$.

Durch die Sätze 4 bis 7 ist die Theorie der Riemannschen Klassen über X vollständig auf die allgemeinere der komplex-analytischen Vektorraumbündel über X zurückgeführt.

2.5. Verallgemeinerungen und Spezialisierungen

Nachdem wir die Zurückführung der Riemannschen Klassen auf komplex-analytische Vektorraumbündel ausführlich dargestellt haben, sollen jetzt noch kurz einige naheliegende Verallgemeinerungen und Spezialisierungen gestreift werden, die sich ebenfalls mühelos den Vektorraumbündeln unterordnen lassen.

A. Zu einer Menge von Punkten $\{b_\kappa; \kappa \in K\} \subset X$ — jede kompakte Teilmenge von X möge nur endlich viele b_κ enthalten — sei jeweils eine in einer punktierten Umgebung $\hat{U}_\kappa$ von b_κ holomorph umkehrbare Matrix $\mathfrak{B}_\kappa \in GL(q, C)$ gegeben. Diese Matrizen können in den Punkten b_λ , die Verzweigungspunkte a_λ , $\lambda \in A$, der betrachteten Klasse sind, zu einer Abschließung von $\bar{W}$, in den b_κ , die nicht Verzweigungspunkte sind, zu einer Abänderung des komplex-analytischen Bündels $\bar{W}$ verwendet werden. In den Verzweigungspunkten b_κ wird $\bar{W}$ einfach mit einer Matrix $\mathfrak{U}_0$ aus 2.3 Hilfssatz 1 durch den der Matrix $\mathfrak{U}_0 \mathfrak{B}_\kappa$ auf $\hat{U}$ entsprechenden Schnitt im $GL(q, C)$ -Hauptfaserbündel abgeschlossen. In den Verzweigungspunkten $\neq b_\kappa$ soll normal abgeschlossen werden. Für einen Nichtverzweigungspunkt b_κ punktiert man $\bar{W}$ in b_κ und schließt gegenüber einer in U_κ enthaltenen Koordinatenumgebung U_i , $b_\kappa \in U_i$, des Atlanten von $\bar{W}$ mit $\mathfrak{B}_\kappa$ als Koordinatentransformation $g_{i\kappa}$ wieder ab. Den meromorphen Schnitten des so erhaltenen Vektorraumbündels W über X entsprechen nun nicht mehr die auf ganz $\hat{\bar{X}}$ meromorphen, in a_λ bestimmten, Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}$, $s \in G$, χ ein fester Homomorphismus: $\pi_1(\bar{X}, x_0) \rightarrow GL(q, C)$, sondern solche Vektoren $\mathfrak{f}$ auf $\hat{\bar{X}}$, die dasselbe Verhalten gegenüber Deckbewegungen aufweisen, in Punkten $\hat{x}$ mit $q(\hat{x}) \neq b_\kappa$ meromorph sind, in den Nichtverzweigungspunkten b_κ dagegen statt dessen $\mathfrak{f}_\kappa = \mathfrak{B}_\kappa^{-1}\mathfrak{f}$ meromorph in b_κ erfüllen, in den Verzweigungspunkten $\neq b_\kappa$ bestimmt sind, in den Verzweigungspunkten b_κ statt dessen sich in der Abschließung meromorph verhalten. Alle solchen Vektoren auf $\hat{\bar{X}}$ bilden wieder eine Klasse, einen Vektorraum über K , der isomorph dem K -Vektorraum der meromorphen Schnitte von W ist. *Meromorphie und Holomorphie wird in dieser Klasse in den Punkten b_κ durch die Matrizen $\mathfrak{B}_\kappa$ „gemessen“.* Die Riemannschen Klassen entsprechen $\mathfrak{B}_\kappa = E$, $\kappa \in K$. In der dualen Klasse hat man b_κ die Matrizen $\mathfrak{B}_\kappa^*$ zuzuordnen. Dann gelten mit entsprechenden Definitionen für Differentiale die Sätze 4 bis 7. — Spezialfall:

Die $\mathfrak{B}_\kappa$ sind Diagonalmatrizen mit Elementen, die in einer Umgebung U_κ von b_κ holomorph und $\neq 0$ sind, in b_κ jedoch eine *wesentliche Singularität* besitzen können. Nimmt man etwa $e^{r^{(l)}}$, $r(t)$ meromorph mit einem Pol in b_κ , so erhält man die von H. RÖHRL betrachteten Klassen [9]. Sie haben die Eigenschaft, daß Vektoren der Klasse mit linear unabhängigen Elementen wieder Differentialgleichungen mit *auf ganz X* meromorphen Koeffizienten entsprechen und die Ableitungen wieder in der Klasse liegen. Beides beruht auf $(e^{r^{(l)}})' = \bar{r}(t) e^{r^{(l)}}$, $\bar{r}(t)$ meromorph in U_κ . Das Fehlen der letzteren Eigenschaft ist nicht wesentlich.

B. Wir haben bisher nur Verzweigungspunkte der Ordnung ∞ betrachtet. Man kann auch *Verzweigungspunkte endlicher Ordnung* vorgeben und z.B. folgendes Problem stellen: X sei kompakt, $a_1, \dots, a_l$ seien endlich viele Punkte auf X , denen jeweils eine Ordnung n_λ zugeordnet sei, die ∞ sein kann. Dann wird $G = \pi_1(\bar{X}, x_0)$, $\bar{X} = X - \{a_1, \dots, a_l\}$, erzeugt von $2p$ Elementen ($p =$ Geschlecht von X) s_i, t_i ($i = 1, \dots, p$), den Rückkehrschnitten von X entsprechend, und l Elementen u_λ , den Punkten $a_1, \dots, a_l$ entsprechend. Zwischen diesen besteht die einzige Relation $R(s, t, u) = s_1 t_1 s_1^{-1} t_1^{-1} \dots s_p t_p s_p^{-1} t_p^{-1} u_1 u_2 \dots u_l = 1$. Man hat eine eindeutige Beziehung zwischen den Isomorphieklassen von Überlagerungsflächen von $\bar{X}$ und den Klassen konjugierter Untergruppen von G . $\bar{X}'$ sei eine solche Überlagerungsfläche, die zum kleinsten Normalteiler N von G gehört, der die Elemente $u_\lambda^{n_\lambda}$, $\lambda = 1, \dots, l$ enthält, wo n_λ die oben a_λ zugeordnete Ordnung bezeichnet und $u_\lambda^\infty = 1$ gesetzt ist. $\bar{X}'$ besitzt dann eine Deckbewegungsgruppe G' über $\bar{X}$, nämlich die Faktorgruppe $G' = G/N$. Diese kann als von $2p + l$ Elementen s_i, t_i, u_λ erzeugte Gruppe mit den Relationen $R(s, t, u) = 1$, $u_\lambda^{n_\lambda} = 1$ ($\lambda = 1, \dots, l$) aufgefaßt werden. $\bar{X}'$ besteht über einer kreisförmigen Umgebung von a_λ aus endlich oder unendlich vielen n_λ -blättrigen punktierten Kreisen. Fügt man für endliches n_λ jedem dieser Kreise jeweils einen über a_λ liegenden Punkt hinzu, so erhält man eine einfach zusammenhängende Fläche. Gegeben sei nun ein Homomorphismus $\chi': G' \rightarrow GL(q, C)$ und gesucht werden alle auf $\bar{X}'$ meromorphen Vektoren $\tilde{f}$ mit $(\tilde{f})s' = \chi'(s')\tilde{f}$, $s' \in G'$, die sich in a_λ bestimmt verhalten. Sie bilden eine Klasse R' . — Nun wird aber durch Zusammensetzung des kanonischen Homomorphismus $G \rightarrow G' = G/N$ und des Homomorphismus $\chi': G' \rightarrow GL(q, C)$ ein Homomorphismus $\chi: G \rightarrow GL(q, C)$ definiert, und es gilt: Die meromorphen Vektoren $\tilde{f}$ auf $\hat{\bar{X}}$, die sich in a_λ bestimmt verhalten, mit $(\tilde{f})s = \chi(s)\tilde{f}$ entsprechen eindeutig den meromorphen Vektoren $\tilde{f} \in R'$. Damit ist das obige „Monodromieproblem“ mit *Verzweigungspunkten beliebiger Ordnung* auf dasjenige mit nur solchen unendlicher Ordnung zurückgeführt. A. WEIL behandelt in [14] den Fall *nur endlicher Ordnungen*.

Natürlich ordnet sich auch der Fall von $l = 0$ Verzweigungspunkten unter. Dann ist $\bar{X} = X$, $\hat{\bar{X}}$ die universelle Überlagerungsfläche von X und $\bar{W} = W$ ein Bündel mit konstanten Koordinatentransformationen zu einem Homomorphismus $\chi: \pi_1(X, x_0) \rightarrow GL(q, C)$. Für $q = 1$ erhält man die *multiplikativen Funktionen und Differentiale auf X* [15].

C. Schließlich behandeln wir nur die Frage nach auf $\hat{X}$ meromorphen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}$, $s \in G = \pi_1(\bar{X}, x_0)$. Oft interessieren dagegen auf $\hat{X}$ meromorphe Matrizen $\mathfrak{F}$ vom Typ (q, p) mit $(\mathfrak{F})s = X(s)\mathfrak{F}$, $s \in G$, X wieder ein Homomorphismus: $G \rightarrow GL(q, C)$. Die Frage nach solchen läßt sich jedoch leicht auf eine entsprechende Frage nach Vektoren zurückführen. Dazu ordnen wir, wenn $\mathfrak{F} = (\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_p)$, wo $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \dots, \mathfrak{f}_p$ die p q -zeiligen Spaltenvektoren von $\mathfrak{F}$ bedeuten, der Matrix $\mathfrak{F}$ einen pq -zeiligen Spaltenvektor

$\mathfrak{f} = \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_1 \\ \mathfrak{f}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{f}_p \end{pmatrix}$ zu. Die auf $\hat{X}$ meromorphen Matrizen $\mathfrak{F}$ vom Typ (q, p) mit $(\mathfrak{F})s = X(s)\mathfrak{F}$, $s \in G$, entsprechen so eineindeutig den auf $\hat{X}$ meromorphen pq -zeiligen Vektoren $\mathfrak{f}$ mit $(\mathfrak{f})s = \chi(s)\mathfrak{f}$, $s \in G$, wo χ den X zugeordneten durch

$$\chi(s) = \begin{pmatrix} X(s) & & 0 \\ & X(s) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & X(s) \end{pmatrix} \Bigg\} pq$$

gegebenen Homomorphismus: $G \rightarrow GL(pq, C)$ bedeutet. Die dazu duale Klasse wird dann von den auf $\hat{X}$ meromorphen Matrizen $\mathfrak{F}^*$ desselben Typus (q, p) mit $(\mathfrak{F}^*)s = X^*(s)\mathfrak{F}^*$, $s \in G$, gebildet. Ordnet man wieder $\mathfrak{F}^* = (\mathfrak{f}_1^*, \dots, \mathfrak{f}_p^*)$ den

pq -zeiligen Spaltenvektor $\mathfrak{f}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_1^* \\ \vdots \\ \mathfrak{f}_p^* \end{pmatrix}$ zu, so entsprechen nun die Matrizen $\mathfrak{F}^*$ mit $(\mathfrak{F}^*)s = X^*(s)\mathfrak{F}^*$, $s \in G$, den Vektoren $\mathfrak{f}^*$ mit $(\mathfrak{f}^*)s = \chi^*(s)\mathfrak{f}^*$, $s \in G$,

$$\chi^*(s) = \begin{pmatrix} X^*(s) & & 0 \\ & X^*(s) & \\ 0 & & \ddots \\ & & & X^*(s) \end{pmatrix} \Bigg\} pq$$

und das „Produkt“ zwischen $\mathfrak{f}^*$ und $\mathfrak{f}$ in 2.3, $\mathfrak{f}^* \wedge \mathfrak{f} = {}^t \mathfrak{f}^* \mathfrak{f}$, drückt sich in den Matrizen dann so aus $\mathfrak{F}^* \wedge \mathfrak{F} = Sp({}^t \mathfrak{F}^* \mathfrak{F})$ ($Sp(A) = \text{Spur von } A$). Das ist aber gerade die die Dualität vermittelnde Bildung in [14].

Literatur

- [1] BIEBERBACH, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin: Springer 1953. — [2] BIRKHOFF, G. D.: A simplified treatment of regular singular points. Trans. Amer. Math. Soc. **11** (1910). — [3] CARTAN, H.: Séminaire ENS, 1949–50. — [4] CARTAN, H.: Séminaire ENS, 1953–54. — [5] CARTAN, H., et SERRE, J. P.: Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. C. R. Acad. Sci. Paris **237**, 128–130 (1953). — [6] HIRZEBRUCH, F.: Neue topologische Methoden in der

algebraischen Geometrie. *Ergebn. der Math.* **9** (1956). — [7] KODAIRA, K.: Harmonic fields in Riemannian manifolds. *Ann. of Math.* **50**, 587–665 (1949). — [8] KÖNIG, R.: Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene. *Crelle J.* **148**, 146–182 (1918). — [9] RÖHRL, H.: Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. I. *Math. Ann.* **123**, 53–75 (1951). — [10] RÖHRL, H.: Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen. *Math. Ann.* **133**, 1–25 (1957). — [11] SCHLESINGER, L.: *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I–II*. Leipzig: B. G. Teubner 1895, 1898. — [12] SERRE, J. P.: *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. *Ann. Institut Fourier* **6**, 1–42 (1955–56). — [13] STEENROD, N.: *The topology of fibre bundles*. Princeton: University Press 1951. — [14] WEIL, A.: *Généralisation des fonctions abéliennes*. *J. Math. pures et appl.*, Paris **1938**, 47–87. — [15] WEYL, H.: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Stuttgart: B. G. Teubner 1955.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 12. Februar 1958)

Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

In Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete.

Herausgegeben von R. Grammel, E. Hopf, H. Hopf, W. Magnus, F. K. Schmidt
B. L. van der Waerden.

Band XCVII:

Lineare Algebra

Von Dr. Werner Graeb, Privatdozent am Mathematischen Institut der Universität
Zürich. Mit 7 Abbildungen. XI, 219 Seiten Gr.-8°. 1958.

DM 35.70; Ganzleinen DM 39.—

Inhaltsübersicht: Lineare Räume. — Lineare Abbildungen und Gleichungssysteme. — Determinanten. — Orientierte lineare Räume. — Multilineare Algebra. — Der Euklidische Raum. — Lineare Abbildungen Euklidischer Räume. — Symmetrische Bilinearfunktionen. — Flächen zweiter Ordnung. — Unitäre Räume. — Invariante Unterräume. — Literaturverzeichnis. — Sachverzeichnis. — Übersicht über den logischen Zusammenhang der einzelnen Kapitel.

Heutzutage ist die lineare Algebra weit mehr als eine Theorie der linearen Gleichungssysteme. Es hat sich im Lauf der letzten Jahrzehnte gezeigt, daß verschiedensten mathematischen Disziplinen ein Gemeinsames zugrunde liegt: die sogenannte „lineare Struktur“ der betrachteten Menge von Objekten. Nicht zuletzt hat die moderne theoretische Physik den Anstoß gegeben zur Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften linearer Strukturen. Dementsprechend umfaßt lineare Algebra heute die Theorie der linearen Räume endlicher Dimension und der linearen Abbildungen dieser Räume. Im Gegensatz zu den meisten deutschsprachigen Darstellungen, die von dem n -dimensionalen Zahlenraum ausgehen, werden hier die linearen Räume axiomatisch eingeführt. Dadurch wird es möglich, alle Begriffe per definitionem invariant zu erklären und die Komponenten bzw. Matrizen nur als eine Darstellungsform der Vektoren und linearen Abbildungen zu gebrauchen. Bei der Behandlung der linearen Abbildungen wird das Hauptgewicht auf die gleichzeitige Betrachtung des dualen Raumes gelegt. Der Begriff des Paares dualer Räume bildet dann auch den Ausgangspunkt der Tensoralgebra. Die Determinante einer linearen Selbstabbildung wird mit Hilfe der total schief-symmetrischen multilinearen Funktionen, also unabhängig von der Volumsberechnung erklärt. Diese schief-symmetrischen Funktionen dienen auch zur koordinatenfreien Definition der Orientierung in linearen Räumen. Nach der Einführung eines positiv definiten Skalarproduktes werden die Eigenschaften des Euklidischen Raumes und die längentreuen und selbstadjungierten Abbildungen, samt ihrer Eigenwerttheorie besprochen. Die symmetrischen bilinearen Funktionen werden allgemein untersucht und daraufhin die Räume mit indefinitem Skalarprodukt betrachtet. Es folgt eine Übertragung der metrischen Begriffe auf komplexe lineare Räume. Schließlich wird die Theorie der Zerlegung linearer Räume in irreduzible invariante Unterräume bezüglich einer linearen Selbstabbildung dargestellt. Dabei werden die irreduziblen Unterräume nicht aus der Matrix mittels ihrer Elementarteiler konstruiert, sondern vielmehr aus der Abbildung selbst.

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“, herausgegeben von L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, M. Kneser, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.

Neue Folge

Soeben erschienen:

Heft 17:

Il teorema di Riemann-Roch per curve, superficie e varietà questioni collegate

Di Professore Dr. Francesco Severi, Roma, Italia. (Reihe: Algebraische Geometrie. Besorgt von B. Segre.) VIII, 131 Seiten Gr.-8°. 1958.

Steif geheftet DM 23.60

Indice: Introduzione. Sistemi lineari di ipersuperficie sopra una varietà. — Il teorema di Riemann-Roch sopra una curva. — Il teorema sopra una superficie. — Richiami sulle nozioni generali di equivalenza algebrica sopra una varietà. Il teorema di Riemann-Roch per sistemi d'equivalenza sopra una superficie. — Il teorema di Riemann-Roch (di specie $r-1$) sopra una varietà algebrica V_r . — Il teorema di Riemann-Roch nei riguardi dell'equivalenza algebrica e razionale. — Bibliografia. — Indice dei nomi. — Indice analitico. — Ferner enthält das Heft kurze Zusammenfassungen der einzelnen Kapitel in englischer Sprache.

Heft 19:

Polynomial Expansions of Analytic Functions

By Professor Ralph P. Boas Jr., Evanston, Ill., USA, and Professor R. Creighton Buck, Madison, Wis., USA, [Reihe: Moderne Funktionentheorie. Besorgt von L. V. Ahlfors.] With 16 Figures. VIII, 77 Seiten Gr.-8°. 1958.

Steif geheftet DM 19.80

Contents: Introduction. Generalities. Representation formulas with a kernel. The method of kernel expansion. Lidstone series. A set of Laguerre polynomials. Generalized Appell polynomials. — Representation of entire functions. General theory. Multiple expansions. Appell polynomials. Sheffer polynomials. More general polynomials. Polynomials not in generalized Appell form. — Representation of functions that are regular at the origin. Integral representations. Brenke polynomials. More general polynomials. Polynomials generated by $A(w)(1-zg(w))^{-\lambda}$. Special hypergeometric polynomials. Polynomials not in generalized Appell form. — Applications. Uniqueness theorems. Functional equations. — Bibliography. — Index.

Heft 21:

Normed Linear Spaces

By Professor Mahlon M. Day, Urbana, Ill., USA. [Reihe: Reelle Funktionen. Besorgt von P. R. Halmos.] V, 139 Seiten Gr.-8°. 1958.

Steif geheftet DM 28.—

Contents: Linear spaces. — Normed Linear spaces. — Completeness, compactness, and reflexivity. — Unconditional convergence and bases. — Compact convex sets and continuous function spaces. — Norm and order. — Metric geometry in normed spaces. — Reader's guide. — Bibliography. — Index of symbols. — Index.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik“ erhalten die „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete“ zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG